

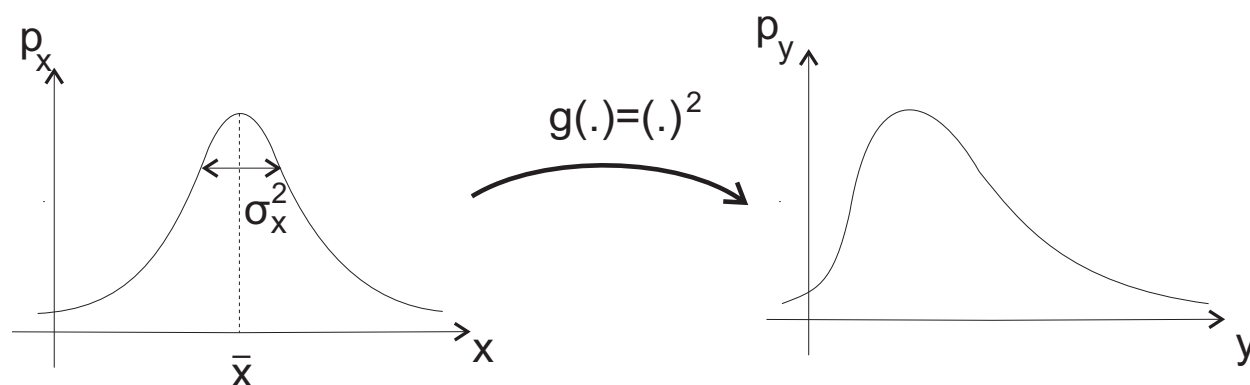
## 24.1 Esempio - Confronto tra EKF ed UKF

Riprendiamo in considerazione l'esempio della lezione precedente, ricordando che

$$y = g(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } p_x \sim \mathcal{N}(\bar{x}, \sigma_x^2),$$

ed ovviamente si ha  $p_y \approx \mathcal{N}()$ .

Le due densità di probabilità sono rappresentate in Figura 24.1 (si noti che  $y$  ha distribuzione unimodale).



**Figura 24.1.** Densità di probabilità  $p_x$  e  $p_y$

I primi due momenti di  $y$  (calcolati nella lezione precedente), cioè media e varianza, introducendo la variabile aleatoria  $\delta x = x - \bar{x} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_x^2)$ , risultano:

$$\begin{aligned} \bar{y}_T &= \mathbb{E}_{p_y}[y] = \mathbb{E}_{p_x}[g(x)] = \mathbb{E}_{p_x}[(\bar{x} + \delta x)^2] = \bar{x}^2 + \sigma_x^2, \\ (\sigma_y^2)_T &= \mathbb{E}_{p_y}[(y - \bar{y}_T)^2] = \mathbb{E}_{p_x}[(\delta x)^4] + 4\bar{x}^2\sigma_x^2 - \sigma_x^4 = 4\bar{x}^2\sigma_x^2 + 2\sigma_x^4, \end{aligned}$$

ricordando che il momento del quarto ordine della gaussiana  $\delta x$  vale  $3\sigma_x^4$ . Se invece  $x$  non fosse gaussiana, il calcolo del momento del quarto ordine in forma chiusa potrebbe non essere possibile (o comunque più laborioso).

Come si è visto nelle lezioni precedenti, gli approcci al calcolo del filtro di Kalman sono due:

- effettuare una linearizzazione della funzione  $g(\cdot)$  intorno alla media  $\bar{x}$  della variabile  $x$ , trattando  $y$  come una gaussiana (EKF)

- approssimare la densità di probabilità della variabile  $x$  con degli impulsi  $\delta$ , mapparli attraverso  $g(\cdot)$  e infine approssimare i punti mappati ancora con una gaussiana (UKF)

Cominciamo con l'EKF.

### 24.1.1 Extended Kalman Filter (EKF)

Si ricordi che usando questo approccio la densità di probabilità di  $y$  viene approssimata con una gaussiana così fatta:

$$p_y(\cdot) \cong \mathcal{N}(g(\bar{x}), \nabla g|_{\bar{x}} \sigma_x^2 \nabla g|_{\bar{x}}^T)$$

dove, essendo  $\nabla g|_{\bar{x}} = \frac{dg(x)}{dx}|_{\bar{x}} = 2\bar{x}$ , si ottiene:

$$p_y(\cdot) \cong \mathcal{N}(\bar{x}^2, 4\bar{x}^2\sigma_x^2)$$

Si osservi che con questo approccio gli errori/approssimazioni sono due:

- si approssima la  $p_y(\cdot)$  con una gaussiana
- media e varianza dell'approssimazione gaussiana non coincidono con media e varianza vera della  $y$

### 24.1.2 Unscented Kalman Filter (EKF)

Usando questo approccio, essendo  $x \in \mathbb{R}$ , cioè  $N = 1$ , si approssima la densità di probabilità di  $x$  con  $2N + 1 = 3$  impulsi, centrati in  $v_i, i = 1, 2, 3$ , e pesati con  $w_i, i = 1, 2, 3$ . Ricordando le espressioni viste nella scorsa lezione (con  $N = 1$ ) si ottiene:

$$\begin{aligned} v_0 &= \bar{x} & w_0 &= \frac{k}{1+k} \\ v_1 &= \bar{x} + \sqrt{k+1} \sigma_x & w_1 &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+k} \\ v_2 &= \bar{x} - \sqrt{k+1} \sigma_x & w_2 &= \frac{1}{2} \frac{1}{1+k} \end{aligned}$$

da cui si ricava

$$p_x(\cdot) \cong \sum_{i=0}^2 w_i \delta(x - v_i) = \tilde{p}_x(\cdot)$$

Media e varianza della densità approssimata risultano:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{p}_x}[x] &= \bar{x} \\ \mathbb{E}_{\tilde{p}_x}[(x - \bar{x})^2] &= \sigma_x^2 \end{aligned}$$

Si osservi che si ha ancora un coefficiente libero,  $k$ , che può essere usato per il matching dei momenti di ordine superiore a due. Il momento terzo è nullo, mentre per il quarto si ha:

$$\mathbb{E}_{\tilde{p}_x}[(x - \bar{x})^4] = \frac{1}{2(k+1)} [2(k+1)^2 \sigma_x^4] = (k+1) \sigma_x^4,$$

Essendo il momento di ordine quattro di una variabile aleatoria gaussiana  $x$  pari a  $3\sigma_x^4$ , ponendo  $k = 2$  si vede che anche il momento del quarto ordine di  $\tilde{p}_x$  coincide con quello della  $p_x$ ; avendo inoltre entrambe le densità momento del quinto ordine pari a zero, l'approssimazione risulta corretta fino al sesto ordine!

La densità di probabilità della variabile  $y$  si ottiene mappando gli impulsi  $\delta$  attraverso la funzione  $g(\cdot)$  e ponendo:

$$p_y(\cdot) \cong \tilde{p}_y(y) = \sum_{i=0}^2 w_i \delta(y - g(v_i))$$

Supponiamo di non avere ancora fissato il parametro  $k$ . La media di  $\tilde{p}_y$  risulta:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{p}_y}[y] &= \sum_{i=0}^2 w_i g(v_i) \\ &= \frac{k}{k+1} \bar{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} [(\bar{x} + \sqrt{k+1} \sigma_x)^2 + (\bar{x} - \sqrt{k+1} \sigma_x)^2] \\ &= \frac{k}{k+1} \bar{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} (2\bar{x}^2 + 2(k+1)\sigma_x^2 + 2\bar{x}\sqrt{k+1} \sigma_x - 2\bar{x}\sqrt{k+1} \sigma_x) \\ \mathbb{E}_{\tilde{p}_y}[y] &= \bar{x}^2 + \sigma_x^2 \end{aligned}$$

In questo caso si ottiene quindi la media vera (a differenza dell'approccio EKF).

Si passa ora al calcolo della varianza; tralasciando i passaggi intermedi, che non presentano particolari difficoltà, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{p}_y}[(y - (\bar{x}^2 + \sigma_x^2))^2] &= \frac{k}{k+1} (\bar{x}^2 - (\bar{x}^2 + \sigma_x^2))^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} [(\bar{x}^2 + \sqrt{k+1} \sigma_x)^2 - (\bar{x}^2 + \sigma_x^2))^2 + \dots \\ &\quad \dots + (\bar{x} - \sqrt{k+1} \sigma_x)^2 - (\bar{x}^2 + \sigma_x^2))^2] \\ &\quad \vdots \\ \mathbb{E}_{\tilde{p}_y}[(y - (\bar{x}^2 + \sigma_x^2))^2] &= k\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2 \bar{x}^2 \end{aligned}$$

Si vede che, per  $k = 2$ , anche la varianza approssimata coincide con quella vera. Quindi in sintesi:

$$p_y(\cdot) \cong \tilde{p}_y(y) = \sum_{i=0}^2 w_i \delta(y - g(v_i)) \cong \mathcal{N}(\bar{x}^2 + \sigma_x^2, 2\sigma_x^4 + 4\sigma_x^2 \bar{x}^2)$$

e si vede che, diversamente da quanto ricavato con l'approccio EKF, qui non c'è errore sui momenti del primo e del secondo ordine.

## 24.2 Confronto tra EKF ed UKF per una generica funzione $g(\cdot)$ e densità $p_x$

In questa sezione si vedrà un confronto tra EKF ed UKF per una generica funzione  $g(\cdot)$  e densità  $p_x$  (non necessariamente gaussiana). Si ricordi che  $y = g(x)$ : approssimando  $p_x$  e

$p_y$  con delle gaussiane la situazione è

$$p_x(\cdot) \cong \mathcal{N}_x(\mu_x, P_x) \xrightarrow{g(\cdot)} p_y(\cdot) \cong \mathcal{N}_y(\mu_y, P_y);$$

si noti che medie e varianze sono però quelle *vere*.

Gli algoritmi EKF ed UKF si basano sull'approssimazione gaussiana della  $p_x$ , e approssimano la  $p_y$  ancora con una gaussiana:

$$p_x(\cdot) \cong \mathcal{N}_x(\mu_x, P_x) \xrightarrow{EKF} \tilde{p}_y^{EKF}(\cdot) \cong \mathcal{N}_y(\mu_y^{EKF}, P_y^{EKF})$$

$$\xrightarrow{UKF} \tilde{p}_y^{UKF}(\cdot) \cong \mathcal{N}_y(\mu_y^{UKF}, P_y^{UKF})$$

Si può ora pensare la media  $\mu_y$  come funzione dei momenti di  $x$  (si noti che la conoscenza della densità di probabilità  $p_x$  equivale alla conoscenza di tutti i momenti di essa), ovvero:

$$\mu_y = h(\mathbb{E}[x], \mathbb{E}[(x - \bar{x})^2], \mathbb{E}[(x - \bar{x})^3], \dots),$$

dove  $\bar{x} = \mu_x = \mathbb{E}[x]$ . Lo stesso ragionamento vale per la varianza di  $y$ .

Si ha allora che, rispetto a  $(\mu_y, P_y)$ ,

- $\mu_y^{EKF}$  è corretta al primo ordine in termini di momenti di  $x$
- $\mu_y^{UKF}$  è corretta al secondo ordine in termini di momenti di  $x$
- $P_y^{EKF}$  e  $P_y^{UKF}$  sono corrette al secondo ordine in termini di momenti di  $x$

Nel caso particolare in cui  $p_x(\cdot)$  sia simmetrica (cioè si hanno tutti i momenti dispari nulli), si ha che  $\mu_y^{UKF}$  e  $P_y^{UKF}$  sono corrette al terzo ordine.

Se infine  $p_x(\cdot)$  è gaussiana e si ha  $k + n = 3, n \leq 3, x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu_y^{UKF}$  e  $P_y^{UKF}$  sono corrette al quinto ordine in termini di momenti di  $x$ .

## 24.3 Analisi del calcolo delle medie

In questa sezione si dimostra quanto detto sulle medie  $\mu_y^{EKF}$  e  $\mu_y^{UKF}$  nella sezione precedente (nel caso più generale). Sia:

$$y = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m,$$

con:

$$x \sim p_x(\cdot), \quad \mathbb{E}[x] = \bar{x}, \quad Var(x) = Var(\Delta x) = P_x$$

dove si è posto  $\Delta x = x - \bar{x}$ .

Effettuando ora un'espansione in serie di Taylor di  $g(x)$  attorno a  $\bar{x}$  risulta:

$$y = g(\bar{x}) + \nabla g|_{\bar{x}} \Delta x + \underbrace{D^2 g|_{\bar{x}} \Delta x^2}_{\in \mathbb{R}^m} + o(\Delta x^2) \quad (24.1)$$

dove:

$$\begin{aligned}
 A &= \nabla g|_{\bar{x}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\
 [A]_{ij} &= \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{\bar{x}} \\
 [D^2 g|_{\bar{x}} \Delta x^2]_i &= \sum_{j,k=1}^n a_{ijk} \delta_{x_j} \delta_{x_k} \\
 a_{ijk} &= \left. \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{\bar{x}} \\
 \mathbb{E}[\delta_{x_j} \delta_{x_k}] &= [P_x]_{jk}
 \end{aligned}$$

Si noti che  $\delta_{x_j}$  non è altro che il  $j$ -esimo elemento del vettore  $\Delta x$ . Calcolando quindi la media di  $y$ , usando l'espressione (24.1), si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[y] &= g(\bar{x}) + \mathbb{E}[D^2 g|_{\bar{x}} \Delta x^2] + \mathbb{E}[o(\Delta x^2)] \\
 \mathbb{E}[y] &= g(\bar{x}) + h(P_x, \bar{x}) + \mathbb{E}[o(\Delta x^2)]
 \end{aligned} \tag{24.2}$$

Si considerino ora gli algoritmi EKF ed UKF.

- Nel caso dell'approccio EKF si ha  $\mu_y^{EKF} = g(\bar{x})$ . Si vede perciò, confrontando con la (24.2), che  $\mu_y^{EKF}$  è corretta solo al primo ordine, perchè non c'è il termine  $h(P_x, \bar{x})$ .
- Per l'UKF si ha invece

$$\mu_y^{UKF} = \sum_{i=0}^{2n} w_i g(v_i), \quad \sum_{i=0}^{2n} w_i v_i = \bar{x}, \quad \sum_{i=0}^{2n} w_i (v_i - \bar{x})(v_i - \bar{x})^T = P_x,$$

con  $v_{2i-1} = \bar{x} + \sigma_i$ ,  $v_{2i} = \bar{x} - \sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $v_0 = \bar{x}$ . Sviluppando  $\mu_y^{UKF}$  in serie di Taylor (ancora attorno a  $\bar{x}$ ):

$$\begin{aligned}
 \mu_y^{UKF} &= w_0 g(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{2n} w_i g(v_i) \\
 &= w_0 g(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{2n} (w_i [g(\bar{x}) + \nabla g|_{\bar{x}}(v_i - \bar{x}) + D^2 g|_{\bar{x}}(v_i - \bar{x})^2 + o((v_i - \bar{x})^2)]) \\
 &= \underbrace{\sum_{i=0}^{2n} w_i g(\bar{x})}_{g(\bar{x})} + \underbrace{\sum_{i=1}^{2n} w_i \nabla g|_{\bar{x}}(v_i - \bar{x})}_0 + \underbrace{\sum_{i=1}^{2n} w_i [D^2 g|_{\bar{x}}(v_i - \bar{x})^2]}_{\mathbb{E}[D^2 g|_{\bar{x}} \Delta x^2]} + \sum_{i=1}^{2n} o((v_i - \bar{x})^2) \\
 &= g(\bar{x}) + h(\bar{x}, P_x) + \sum_{i=1}^{2n} o((v_i - \bar{x})^2)
 \end{aligned} \tag{24.3}$$

Quindi, confrontando ancora con la (24.2), si vede che l'algoritmo UKF sbaglia solo dopo il secondo ordine. In maniera analoga si può procedere al calcolo della varianza  $P_y^{UKF}$  e far vedere che coincide al secondo ordine con la varianza vera  $P_y$ .

Si osservi che si potrebbe calcolare in forma esplicita la funzione  $h$  per usarla poi nel filtro di Kalman esteso (come correzione di  $\mu_y^{EKF}$ ), questo però sarebbe oneroso dal punto di vista computazionale, perchè richiede il calcolo dell' Hessiano che corrisponde al calcolo degli elementi di una matrice a tre dimensioni.