

## 22.1 Filtro di Kalman esteso

Si consideri il seguente sistema dinamico a tempo discreto con evoluzione dello stato e legame stato-uscita (eventualmente) non lineari:

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k, w_k) \\ y_k = h(x_k, v_k) \end{cases}$$

dove  $w_k$  e  $v_k$  sono rumori di processo e di misura con distribuzioni rispettivamente  $w_k \sim p_w(\cdot)$  e  $v_k \sim p_v(\cdot)$ , non necessariamente gaussiane. Si assume che tali rumori siano bianchi e scorrelati tra loro,  $v_k \perp w_k$ . La condizione iniziale è  $x(0) = x_0$ , con  $x_0$  vettore aleatorio distribuito secondo  $x_0 \sim p_0(\cdot)$ . Si suppone inoltre che, ad ogni istante  $k$ , i controlli  $u_k, u_{k-1}, \dots$  siano noti. Le mappe  $f$  e  $h$  possono eventualmente essere tempo varianti, cioè  $f(\cdot) = f_k(\cdot)$  e  $h(\cdot) = h_k(\cdot)$ .

Le ipotesi sul sistema non permettono di applicare il filtro di Kalman classico.

Il calcolo, istante per istante, della distribuzione

$$p(x_k | y_0, \dots, y_k, u_0, \dots, u_{k-1})$$

è, da un punto di vista pratico, troppo difficile da eseguire. Anche lo stimatore ottimo:

$$\hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}[x_k | y_0, \dots, y_k, u_0, \dots, u_{k-1}].$$

è computazionalmente difficile da calcolare e quindi è necessario operare delle approssimazioni.

L'algoritmo prende il nome di Filtro di Kalman Esteso (EKF), ed è basato sull'idea di applicare il filtro di Kalman classico al sistema linearizzato istante per istante.

Si suppone che  $u_k$  sia noto e che i rumori  $v_k$  e  $w_k$  abbiano distribuzioni gaussiane. Lo stato  $x_k$  non avrà, in generale, distribuzione gaussiana, essendo la dinamica non lineare.

Si consideri la mappa:

$$z = g(\xi)$$

dove  $\xi$  è una variabile aleatoria a distribuzione  $p_\xi(\cdot)$  nota. Siano  $\xi \in \mathbb{R}^m$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  e  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  sia una mappa non lineare nota.

Il procedimento consiste in due approssimazioni:

- approssimare  $p_\xi$  con una gaussiana  $\tilde{p}_\xi \sim \mathcal{N}(\bar{\xi}, P_\xi)$

- approssimare la mappa  $g$  con la sua linearizzazione  $\frac{\partial g}{\partial \xi}$

in modo che la variabile  $z$  possa essere approssimata a sua volta da una variabile gaussiana con distribuzione  $\tilde{p}_z \sim \mathcal{N}(\bar{z}, P_z)$ .

Le equazioni del filtro di Kalman classico sono:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = A\hat{x}_{k|k} + Bu_k \\ P_{k+1|k} = AP_{k|k}A^T + Q \end{cases} \quad \text{Predizione}$$

e

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T(CP_{k+1|k}C^T + R)^{-1}(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1|k}) \\ P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C^T(CP_{k+1|k}C^T + R)^{-1}CP_{k+1|k} \end{cases} \quad \text{Aggiornamento}$$

basate sulle ipotesi:  $x_k \sim \mathcal{N}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$ ,  $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$  e  $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ .

La dinamica linearizzata del sistema considerato è:

$$x_{k+1} \simeq \underbrace{f(\hat{x}_{k|k}, u_k, 0)}_{\text{punto di media}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{(\hat{x}_{k|k}, u_k, 0)}}_{A_k} (x_k - \hat{x}_{k|k}) + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial w_k} \Big|_{(\hat{x}_{k|k}, u_k, 0)}}_{F_k} w_k,$$

da cui si pone come stimatore ottimo:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k} = \mathbb{E}[x_{k+1} | y_0, \dots, y_k, u_0, \dots, u_k] = f(\hat{x}_{k|k}, u_k, 0) \\ P_{k+1|k} = A_k P_{k|k} A_k^T + F_k Q F_k^T \end{cases}$$

Si noti che non vi è alcuna garanzia teorica che tale stimatore sia quello ottimo, e in realtà nemmeno che sia corretto, trattandosi solo di un'approssimazione. In particolare le matrici  $P_{k+1|k}$  non corrispondono alle vere varianze d'errore di questo stimatore.

Allo stesso modo, l'uscita linearizzata è data da:

$$y_k \simeq h(\hat{x}_{k|k}, 0) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_k} \Big|_{(\hat{x}_{k|k}, 0)}}_{C_k} (x_k - \hat{x}_{k|k}) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial v_k} \Big|_{(\hat{x}_{k|k}, 0)}}_{G_k} v_k$$

da cui il passo di aggiornamento risulta:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1|k+1} = \hat{x}_{k+1|k} - P_{k+1|k}C_k^T(C_kP_{k+1|k}C_k^T + G_kRG_k^T)^{-1}(y_{k+1} - h(\hat{x}_{k+1|k}, 0)) \\ P_{k+1|k+1} = P_{k+1|k} - P_{k+1|k}C_k^T(C_kP_{k+1|k}C_k^T + G_kRG_k^T)^{-1}C_kP_{k+1|k} \end{cases}$$

Si noti che:

- il Filtro di Kalman Esteso è una tecnica basata su ipotesi di gaussianità e piccola varianza dei rumori ed in genere non permette di avere garanzie di stabilità.
- l'analisi in termini di prestazioni e varianze di errore è in genere non possibile per l'EKF;
- può succedere che l'EKF funzioni bene per lunghi tratti, salvo poi divergere irrimediabilmente.

## 22.2 Unscented Kalman Filter

Si consideri nuovamente la mappa:

$$z = g(\xi).$$

Come si è visto, l'EKF approssima la distribuzione  $p_\xi(\cdot)$  con una gaussiana, e la mappa  $g$  con la sua linearizzazione istante per istante:

$$p_\xi(\cdot) \simeq \mathcal{N}(\bar{\xi}, P_\xi) \xrightarrow{EKF} \tilde{p}_z(\cdot) \sim \mathcal{N}(g(\bar{\xi}), \nabla g|_{\bar{\xi}} P_\xi \nabla g|_{\bar{\xi}}^T)$$

dove  $\nabla g|_{\bar{\xi}} = \frac{\partial g}{\partial \xi}|_{\xi=\bar{\xi}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Si consideri ora di approssimare la distribuzione di  $\xi$ , che si suppone essere effettivamente una gaussiana, con un delta centrato nella media, e di applicare la mappa  $g$  non approssimata:

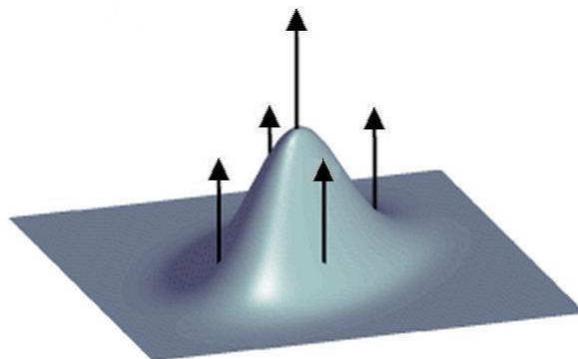
$$\xi \sim \delta(\xi - \bar{\xi}) \xrightarrow{g(\cdot)} z \sim \delta(z - g(\bar{\xi}))$$

in modo che anche la variabile di uscita abbia distribuzione impulsiva, centrata nell'immagine della media di  $\xi$  secondo la mappa  $g$ .

L'Unscented Kalman Filter (UKF) si basa sull'idea di approssimare la distribuzione  $p_\xi(\cdot)$  mediante una combinazione lineare convessa di impulsi:

$$p_\xi(\cdot) \simeq \sum_{i=1}^l w_i \delta(\xi - \bar{\xi}_i) \xrightarrow{UKF} \tilde{p}_z(\cdot) = \sum_{i=1}^l w_i \delta(z - \underbrace{g(\bar{\xi}_i)}_{z_i})$$

dove  $w_i \geq 0$  e  $\sum_{i=1}^l w_i = 1$ . La scelta degli  $\bar{\xi}_i$  è effettuata campionando in  $\mathbb{R}^m$  un numero  $l$  di punti sufficiente a garantire un buon matching dei primi momenti.



**Figura 22.1.** Distribuzione Gaussiana con  $m = 2$  e impulsi sugli assi dell'ellisse.

Nel caso di distribuzione gaussiana,  $p_\xi(\cdot) \sim \mathcal{N}(\bar{\xi}, P_\xi)$ , l'approssimazione avviene utilizzando

$1 + 2m$  impulsi, di cui il primo centrato in  $\bar{\xi}$  con peso  $w_0$ , e gli altri disposti lungo gli assi dell'ellisse relativa a  $P_\xi$  con pesi uguali  $w_1 = \dots = w_{2m} = w$  e  $w = \frac{1}{2m}(1 - w_0)$ .

Il grado di libertà rimanente, cioè il peso  $w_0$ , può essere utilizzato per ottenere una buona approssimazione del momento di quart'ordine.

Per ottenere gli assi dell'ellisse che individua la gaussiana si diagonalizza la matrice simmetrica semidefinita positiva  $P_\xi$ :

$$P_\xi = T \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m^2 \end{bmatrix} T^{-1} = [\lambda_1 v_1 \quad \dots \quad \lambda_m v_m] [\lambda_1 v_1 \quad \dots \quad \lambda_m v_m]^{-1}$$

dove  $T = [v_1 \quad \dots \quad v_m]$  è una matrice a colonne ortonormali che individuano gli assi dell'ellisse.

Si ottiene dunque:

$$\tilde{p}_\xi(\cdot) = w_0 \delta(\xi - \bar{\xi}) + \frac{1 - w_0}{2m} \sum_{i=1}^m (\delta(\xi + \alpha \lambda_i v_i - \bar{\xi}) + \delta(\xi - \alpha \lambda_i v_i + \bar{\xi}))$$

dove  $\alpha$  è un parametro legato a  $w_0$ , utilizzato per spostare gli impulsi lungo gli assi dell'ellisse.