| PSC: Progettazione di sistemi di controllo | a.a. 2010-2011 |
|---|---|
| Lezione 17 — 24 Novembre 2010 | |
| *Docente: Luca Schenato* | *Stesori: Bertinato Marco, Ortolan Giulia, Zambotto Patrizio* |

## 17.1 Problema del consensus: analisi *worst-case*

Ci si pone ora l'obiettivo di trovare delle condizioni sulle matrici $P(t)$ che garantiscano di arrivare comunque al *consensus*. Si consideri il sistema

$$x(t+1) = P(t)x(t) \tag{17.1}$$

dove $P(t)$ sono matrici stocastiche tempo-varianti. Lo stato ad un preciso istante $t$ è funzione dello stato iniziale $x(0)$ attraverso la relazione

$$x(t) = P(t-1)\dots P(0)\ x(0)$$

e la condizione di convergenza (*consensus*) diviene

$$x(t) \xrightarrow{t\to\infty} \alpha\mathbb{1} \quad \text{se} \quad P(t-1)\dots P(0) \xrightarrow{t\to\infty} \mathbb{1}\ q^T \tag{17.2}$$

É lecito a questo punto porsi le seguenti domande:

1) come si traduce in termini di $P(t)$ la condizione (17.2)?

2) come è determinato il vettore $q$?

Sia $\{\mathbb{1}, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base generica di $\mathbb{R}^n$, e sia $T = [\mathbb{1}\ v_1\ \dots\ v_{n-1}]$ la corrispondente matrice di cambiamento di base. É possibile riscrivere la matrice $P$ nella nuova base come

$$T^{-1}P(t)T = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \widetilde{P}(t) \end{array}\right],$$

dove $\widetilde{P} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ ed 1 è l'autovalore relativo all'autovettore $\mathbb{1}$ (la matrice $P$ è stocastica). Si noti che se $x(t) \in \langle v_1, \dots, v_{n-1}\rangle \triangleq V$, allora $x(t+1) = P(t)x(t) \in V$, e quindi $V$ è un insieme invariante dello stato. Per raggiungere il *consensus* bisogna che l'evoluzione dello stato a regime sia determinata soltanto dall'autovettore $\mathbb{1}$, che equivale a richiedere che il prodotto delle matrici $\widetilde{P}(t)\dots\widetilde{P}(0) \longrightarrow 0$, ovvero sia strettamente stabile. Non è banale trovare delle condizioni necessarie e sufficienti riguardanti questo problema: infatti è noto che matrici $\widetilde{P}(1)$ e $\widetilde{P}(2)$ stabili *non* implicano che $\widetilde{P}(2)\widetilde{P}(1)$ è stabile, e il prodotto di matrici instabili può essere stabile.

Si vogliono allora trovare delle condizioni sufficienti sulle singole $\widetilde{P}(t)$ che garantiscano la convergenza a 0 del prodotto $\widetilde{P}(t)\dots\widetilde{P}(0)$ a prescindere dalla particolare sequenza. Una possibilità è quella di pensare in termini di norma della matrice. Trovando che esiste una norma tale che

1. $\|\widetilde{P}(t)\| \leq \lambda < 1 \ \forall t$;
2. $\|\widetilde{P}(1)\widetilde{P}(2)\| \leq \|\widetilde{P}(1)\| \cdot \|\widetilde{P}(2)\|$ (proprietà submoltiplicativa);

allora

$$\|P(t)\dots P(0)\| \leq \|P(t)\|\dots\|P(0)\| \leq \lambda^t$$

In genere la condizione 1. è molto restrittiva e la scelta della norma è di fondamentale importanza; le norme che soddisfano la proprietà 2., di solito, sono le *norme indotte*. Si definiscono allora le seguenti norme indotte

- $\|A\|_{i2} = \max_{\|x\|_2 \leq 1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$;
- $\|A\|_{i1} = \max_{\|x\|_1 \leq 1} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}$;
- $\|A\|_{i\infty} = \max_{\|x\|_\infty \leq 1} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$;
- $\|A\|_{iQ} = \max_{\|x\|_Q \leq 1} \frac{\|Ax\|_Q}{\|x\|_Q}$, dove $Q > 0$ e $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$.

Si vede subito dalla definizione di norma indotta che

- $\|A\|_{i1} \geq |\lambda_{MAX}|$ (autovalore massimo);
- $\|A\|_{i\infty} = |\lambda_{MAX}|$.

Nel caso delle matrici stocastiche, in letteratura è stato dimostrato come vi sia una certa convenienza nell'utilizzare la norma indotta infinito: applicando il teorema di Peròn-Frobenius, si trova che la norma indotta infinito di una matrice stocastica è sempre unitaria.

L'obiettivo è avere convergenza esponenziale all'*agreement*: ciò si traduce nel richiedere che il prodotto delle matrici $P(t-1)\dots P(0)$ converga ad una matrice di rango 1

$$\|P(t-1)\dots P(0) - \mathbb{1}q(t)\|_{i\infty} \leq b\lambda^t \quad \Longrightarrow \quad x(t) \longrightarrow \alpha\mathbb{1}.$$

Si definiscano ora due nuovi operatori applicabili ad un generico vettore $p \in \mathbb{R}^n$

- l'operatore $\lfloor\cdot\rfloor$ che individua la componente del vettore di valore minore
$$\lfloor p \rfloor \triangleq \min_i p_i; \tag{17.3}$$
- l'operatore $\lceil\cdot\rceil$ che individua la componente del vettore di valore maggiore
$$\lceil p \rceil \triangleq \max_i p_i; \tag{17.4}$$

banalmente si ha $\lfloor p \rfloor \leq \lceil p \rceil$. Se $P$ è stocastica si trova che

$$\lfloor Pp \rfloor = \min_i \sum_{j=1}^{n} P_{ij} p_j \geq \min_i \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \lfloor p \rfloor = \lfloor p \rfloor ,$$

e analogamente vale anche $\lceil Pp \rceil \leq \lceil p \rceil$. Quindi, considerando l'evoluzione (17.1), le successioni $\lfloor x(t) \rfloor$ e $\lceil x(t) \rceil$ sono rispettivamente *monotona crescente* e *monotona decrescente*, a prescindere dalla sequenza $P(t)$[1]. Le successioni sono inoltre limitate, dato che

$$\lfloor x(0) \rfloor \leq \lfloor x(t) \rfloor \leq \lceil x(t) \rceil \leq \lceil x(0) \rceil ;$$

pertanto esistono finiti i limiti $\lim_{t\to\infty} \lfloor x(t) \rfloor$ e $\lim_{t\to\infty} \lceil x(t) \rceil$.

L'operatore (17.3) può essere esteso alle matrici:

$$\lfloor P \rfloor \triangleq \text{ vettore riga che contiene l'elemento più piccolo di ogni colonna;} \tag{17.5}$$

questo nuovo operatore consente di definire una nuova matrice non negativa:

$$\lfloor\!\lfloor P \rfloor\!\rfloor = P - \mathbb{1} \lfloor P \rfloor \geq 0.$$

Nella prossima lezione si approfondirà il seguente risultato:

**Teorema 17.1.** *Se* $\exists\ \lambda < 1 :\ \| \lfloor\!\lfloor P(t) \rfloor\!\rfloor \|_{i\infty} < \lambda\ \forall\ t$, *allora*

$$\| P(t-1) \dots P(0) - \mathbb{1} q(t) \|_{i\infty} \leq b\lambda^t \quad \text{con} \quad q(t) = \lfloor P(t-1) \dots P(0) \rfloor .$$

In particolare, poichè si dimostrerà che l'operatore (17.5) individua una successione monotona e limitata si ha che esiste finito $\lim_{t\to\infty} q(t) = q$, che rappresenta l'*agreement* che sarà raggiunto. È utile infine osservare che

$$\| P - \mathbb{1} \lfloor P \rfloor \|_{i\infty} < 1$$
$$\Updownarrow$$
$\lfloor P \rfloor$ ha almeno un elemento non nullo,
ovvero $P$ ha almeno una colonna con tutti gli elementi strettamente positivi;
$$\Updownarrow$$
$\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ è *strongly rooted graph*,
cioè esiste un nodo che in un solo passo può comunicare con tutti gli altri.

## 17.2 Condizioni di convergenza al consensus

Si riprende il problema, proposto nella lezione precedente, di trovare delle condizioni necessarie e sufficienti sulla sequenza di matrici $P(t)$ che consentano di raggiungere comunque il *consensus*

[1] Quanto mostrato si può ricondurre ad una considerazione di tipo geometrico: l'intervallo di valori che comprende le componenti dello stato non può aumentare.

(*analisi del caso peggiore*). Si ricorda il modello che descrive la dinamica del sistema:

$$x(t+1) = P(t)x(t), \tag{17.6}$$

con $P(t)$ matrice stocastica tempovariante; l'*agreement* è raggiunto quando $x(t) \xrightarrow{t \to \infty} \alpha \mathbb{1}$, i.e. tutte le componenti dello stato convergono allo stesso valore.

Risulta utile definire alcuni operatori per matrici $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- l'operatore $\lfloor \cdot \rfloor$, vettore riga che contiene l'elemento minore di ciascuna colonna:

$$\lfloor P \rfloor \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$
$$(\lfloor P \rfloor)_i \triangleq \min_j P_{ji}, \; i = 1 \dots n;$$

- l'operatore $\lceil \cdot \rceil$, vettore riga che contiene l'elemento maggiore di ciascuna colonna

$$\lceil P \rceil \in \mathbb{R}^{1 \times n},$$
$$(\lceil P \rceil)_i \triangleq \max_j P_{ji}, \; i = 1 \dots n;$$

- l'operatore $\llbracket \cdot \rrbracket$, definito come segue:

$$\llfloor P \rrfloor \triangleq P - \mathbb{1} \lfloor P \rfloor;$$

- l'operatore $\llceil \cdot \rrceil$, definito come segue:

$$\llceil P \rrceil \triangleq \mathbb{1} \lceil P \rceil - P.$$

Si noti che se $P$ ha tutti gli elementi non negativi, $\llfloor P \rrfloor$ e $\llceil P \rrceil$ sono ancora ad elementi non negativi. Inoltre si ricorda che, proprio come se $x(t)$ è soluzione di (17.6) allora $\lfloor x(t) \rfloor$ (operatore su vettori) individua una successione monotona crescente e limitata, così nel caso matriciale si ha analogamente

$$\dots \geq \lfloor P(3)P(2)P(1) \rfloor \geq \lfloor P(2)P(1) \rfloor \geq \lfloor P(1) \rfloor$$

e

$$\lceil P(1) \rceil \geq \lceil P(2)P(1) \rceil \geq \lceil P(3)P(2)P(1) \rceil \geq \dots,$$

quindi $\lfloor P(k)P(k-1)\dots P(1) \rfloor$ è successione monotona crescente e $\lceil P(k)P(k-1)\dots P(1) \rceil$ è successione monotona decrescente[2]. Inoltre, poichè $\lfloor P(k)P(k-1)\dots P(1) \rfloor \leq \lceil P(k)P(k-1)\dots P(1) \rceil$, entrambe le successioni sono monotone e limitate, pertanto ammettono limite finito

$$\lim_{k \to +\infty} \lfloor P(k)P(k-1)\dots P(1) \rfloor \quad (\geq \lceil P(1) \rceil)$$
$$\lim_{k \to +\infty} \lceil P(k)P(k-1)\dots P(1) \rceil \quad (\leq \lfloor P(1) \rfloor).$$

[2]Per semplicità di notazione e per attenersi a quanto mostrato a lezione, si suppone $t_0 = 1$.

Si presenta di seguito una condizione sufficiente per la convergenza al *consensus* della dinamica (17.6).

**Teorema 17.2.**

$$\begin{aligned}\left\| \llbracket P(t) \rrbracket \right\|_{i\infty} \leq \lambda < 1 \ \forall t \implies & \left\| P(k)P(k-1)\dots P(1) - \mathbb{1}\lfloor P(k)P(k-1)\dots P(1) \rfloor \right\|_{i\infty} \leq \bar{b}\lambda^k \\ \implies & \lim_{k \to +\infty} \left\| P(k)P(k-1)\dots P(1) - \mathbb{1}\lfloor P(k)P(k-1)\dots P(1) \rfloor \right\|_{i\infty} = 0\end{aligned}$$

*La condizione esposta garantisce convergenza esponenziale al* consensus, *con velocità non inferiore a quella di* $\lambda^k$.

La condizione $\left\| \llbracket P(t) \rrbracket \right\|_{i\infty} \leq 1$ equivale ad avere $\forall t$ almeno una colonna di $P(t)$ con tutti gli elementi strettamente positivi; infatti vale

$$\left\| \llbracket P(t) \rrbracket \right\|_{i\infty} \iff \left\| P - \mathbb{1}\lfloor P(t) \rfloor \right\|_{i\infty} \leq 1 \iff \lfloor P(t) \rfloor \neq 0.$$

### 17.2.1 Effetti sul grafo di comunicazione

Riprendendo l'esempio sulla convergenza della posizione dei veicoli si supponga di avere

$$\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_N(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & p_{1j}(t) & * \\ * & p_{2j}(t) & * \\ * & \vdots & * \\ * & p_{Nj}(t) & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{bmatrix}, \quad p_{ij}(t) > 0 \ \forall t, \ \forall i = 1, \dots, N.$$

Il fatto che la colonna $j-$esima della matrice di aggiornamento abbia sempre elementi strettamente positivi implica che tutti gli agenti si avvicinano a $x_j$ al passo successivo (i.e. si riduce l'area del poligono convesso che contiene gli agenti). Quando ciò accade, si dice che il grafo $\mathcal{G}_P$ è *strongly rooted*, ovvero un certo nodo $j$ è in grado di comunicare con tutti gli altri con un percorso di lunghezza unitaria[3]. Per quanto meno restrittiva rispetto alla condizione di grafo completo, questa condizione rimane molto forte: pare quindi che il teorema 17.2 sia di scarsa utilità pratica. Si mostra che in realtà è possibile allentare la condizione esposta ottenendo un'altra condizione sufficiente a garantire convergenza al *consensus*.

Si considerino i prodotti di $M$ matrici stocastiche

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(1) &\triangleq P(M)\dots P(1), \\ \vdots \ \ & \ \ \vdots \\ \widetilde{P}(k) &\triangleq P\big((k-1)M + M\big)\dots P\big((k-1)M + 1\big),\end{aligned}$$

che sono ancora matrici stocastiche, e la sequenza $\widetilde{P}(k)\widetilde{P}(k-1)\dots\widetilde{P}(1)$. Allora è sufficiente che il teorema 17.2 valga sostituendo $P(t)$ con $\widetilde{P}(t)$ per avere convergenza al *consensus*.

[3]Quando in un grafo si ha un nodo che comunica con tutti gli altri si parla di configurazione a stella o di tipo *master-slave*.

Per vedere l'utilità di questa considerazione si definisce la *composizione* tra grafi:

$$\mathcal{G}_{P(t+1)} \circ \mathcal{G}_{P(t)} \triangleq \mathcal{G}_{P(t+1)P(t)},$$

operatore binario che non gode di proprietà commutativa. Si vede facilmente che, se ogni nodo ha il proprio *self-loop* (i.e. gli elementi della diagonale di $P(t)$ sono non nulli $\forall t$), come è sempre nei casi in analisi, sicuramente tutti gli archi presenti al passo $t$ vanno ad aggiungersi agli archi del passo $t+1$, ovvero

$$\big(P(t)\big)_{ij} \neq 0 \Rightarrow \big(P(t+1)P(t)\big)_{ij} \neq 0 \qquad \text{e quindi} \qquad \mathcal{G}_{P(t+1)} \circ \mathcal{G}_{P(t)} \supseteq \mathcal{G}_{P(t+1)} \cup \mathcal{G}_{P(t)}.$$

Si osservi che, in generale, $\mathcal{G}_{P(t+1)} \circ \mathcal{G}_{P(t)} \neq \mathcal{G}_{P(t+1)} \cup \mathcal{G}_{P(t)}$ dato che il prodotto tra matrici può far comparire anche altri archi; inoltre, se la proprietà di *strongly rooted* vale per l'unione dei grafi, allora essa vale anche per la composizione.

Si ricorda che, se $\mathcal{G}_{P(t)}$ è *strongly rooted* $\forall\, t$, allora c'è convergenza esponenziale al *consensus*. Il teorema seguente mostra come sia possibile ottenere grafi *strongly rooted* tramite la composizione di grafi non *strongly rooted*.

**Teorema 17.3.** *Se $\forall t$ $\mathcal{G}_{P(t)}$ è* rooted *(i.e. esiste un nodo che riesce a raggiungere tutti gli altri con cammini di lunghezza qualsiasi) allora*

$$\overline{\mathcal{G}} \triangleq \underbrace{\mathcal{G}_{P((n-1)^2)} \circ \mathcal{G}_{P((n-1)^2-1)} \circ \ldots \circ \mathcal{G}_{P(1)}}_{\textit{composizione di } (n-1)^2 \textit{ grafi}}$$

*è strongly rooted.*

Per applicare il teorema 17.3 non è necessario che al variare di $t$ i grafi $\mathcal{G}_{P(t)}$ siano *rooted* rispetto allo stesso nodo; tuttavia se ciò accade allora vale il corollario seguente.

**Corollario 17.1.** *Se i grafi $\mathcal{G}_{P(t)}$ sono* rooted *rispetto allo stesso nodo $\forall t$, allora*

$$\overline{\mathcal{G}} \triangleq \underbrace{\mathcal{G}_{P(n-1)} \circ \mathcal{G}_{P(n-2)} \circ \ldots \circ \mathcal{G}_{P(1)}}_{(n-1)} \quad \textit{è strongly rooted.}$$

Nel caso descritto dal Corollario 17.1 ci si aspetta di avere una velocità di convergenza al *consensus* maggiore rispetto al caso del Teorema 17.3.

Banalmente, come conseguenza del Corollario 17.1, si ha che se $\mathcal{G}_{P(t)}$ è fortemente connesso per ogni $t$ allora si ha convergenza al *consensus*: si tratta infatti di un caso particolare di sequenza di grafi *rooted* rispetto allo stesso nodo.

Le considerazioni appena fatte mostrano che non è così difficile garantire la convergenza (e.g. l'algoritmo *broadcast* consente di giungere al *consensus*): basta infatti che $P(t)$ individui $\forall t$ un grafo semplicemente *rooted* per arrivare comunque al *consensus*. È importante ribadire il fatto che le proprietà dei grafi descritte devono valere per ogni $t$.

Quanto finora esposto mira all'*agreement* generico; per ottenere l'*average consensus* sono invece richieste condizioni più restrittive, che non verranno discusse in questa sede.