

16.1 Problema del consensus

Si consideri la legge di evoluzione introdotta la scorsa lezione

$$x_{t+1} = Px_t \quad (16.1)$$

riscrivibile in maniera compatta nella forma $x^+ = Px$ con condizioni iniziali $x(0) = x_0 = [x_1(0) \dots x_N(0)]'$. Nell'equazione (16.1) P una matrice *stocastica per righe*, ovvero una matrice in cui:

- gli elementi sono tutti non negativi, $p_{ij} \geq 0$;
- la somma degli elementi per righe pari ad 1, $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1, \forall i$;

le due proprietà portano ad osservare che 1 autovalore destro della matrice P relativo all'autovettore $\mathbb{1} \triangleq [1 \ 1 \ \dots \ 1]'$: $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$. In particolare, ci si limiterà a studiare matrici P che hanno elementi strettamente positivi sulla diagonale, che equivale a supporre che nella sua evoluzione temporale ogni nodo tenga conto del suo valore all'istante precedente.

Si dice che si giunge al *consensus* (convergenza verso un'opinione comune) quando si ha:

$$x_t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \alpha \mathbb{1}.$$

Data una P stocastica ed un'equazione come (16.1), condizione sufficiente per avere convergenza al *consensus* che il grafo corrispondente \mathcal{G}_P sia *fortemente connesso*, ovvero per ogni coppia di vertici $i, j \in \mathcal{G}_P$ esiste un cammino che li congiunge. Per dimostrarlo, supponiamo per il momento che P sia una matrice stocastica e positiva; allora per il teorema di Perón-Frobenius la forma di Jordan di P del tipo

$$P = T^{-1} \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & & & \\ \hline & \Lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Lambda_m \end{array} \right] T$$

con $\lambda_0 = 1$ autovalore dominante che individua un blocco di dimensione unitaria, Λ_i blocchi relativi agli altri autovalori λ_i di modulo inferiore ad 1 e T^{-1} matrice di cambiamento di base ottenuta mettendo sulle colonne i vettori delle catene di Jordan associate agli autovalori¹. Chiamiamo $\Lambda \triangleq$

¹Rispetto alla notazione classica, stato invertito il ruolo di T con il ruolo di T^{-1} . Si segue questa scelta per rimanere aderenti alla notazione adottata a lezione.

$\text{diag}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_m\}$, $\Lambda \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$, la sottomatrice costituita dai blocchi relativi agli autovalori minori di 1. Scomponendo la matrice di cambiamento di base T in:

$$T = \begin{bmatrix} w^T \\ W \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = [v \ V] = [\mathbb{1} \ V], \quad T^{-1}T = [v \ V] \begin{bmatrix} w^T \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

con w, v vettori colonna, possibile scrivere la matrice P come

$$P = v\lambda_0 w^T + V\Lambda W = \mathbb{1}w^T + V\Lambda W. \quad (16.2)$$

Ad un generico istante t lo stato espresso dalla relazione

$$x_t = P^t x_0;$$

per le condizioni di *consensus* quindi fondamentale studiare il comportamento di P^t per $t \rightarrow \infty$; da (16.2) si trova

$$P^t = \mathbb{1}w^T + V\Lambda^t W \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{1}w^T,$$

dove il secondo addendo converge a 0 poich la matrice Λ^t asintoticamente stabile, ovvero con autovalori di modulo strettamente inferiore ad 1. La dinamica del sistema (16.1) per t grande diviene quindi

$$x_t = P^t x_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{1}w^T x_0 = \alpha \mathbb{1} \quad (16.3)$$

dove α combinazione lineare delle componenti dello stato iniziale pesate con i coefficienti dell'autovettore sinistro w^T . Il fatto che P sia positiva garantisce quindi la convergenza al *consensus*; in generale, se il grafo \mathcal{G}_P fortemente connesso allora $P^k > 0$ per qualche k e si pu ripetere il ragionamento appena fatto sostituendo P con P^k , ovvero considerando $t \in \mathbb{Z}(k)$.

16.2 Analisi delle prestazioni: velocità di convergenza

L'obiettivo quello di ottenere una stima delle prestazioni del sistema in esame; a questo proposito si vuole determinare la velocità di convergenza verso un accordo (*agreement*) dei vari elementi che costituiscono il sistema, ovvero le componenti dello stato. Si anticipa che questa analisi di tipo qualitativo e si trover che la velocità di convergenza di $x_t \rightarrow \alpha \mathbb{1}$ legata al secondo autovalore dominante di P .

È utile introdurre il concetto di *rate di convergenza*, il cui significato deducibile dal seguente esempio.

Esempio. Data la seguente funzione somma di due termini esponenziali

$$g(t) = 2^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t \simeq 2^t \text{ per } t \text{ elevati};$$

si pu dire che essa, per t elevati, dominata dal termine 2^t .

Analogamente per

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{1}{2}\right)^t \simeq \left(\frac{2}{3}\right)^t \text{ per } t \text{ elevati}$$

si ha che la funzione dominata dal termine maggiore in modulo. In generale, si dimostra che

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log f(t)}{t} = \log R_f \quad (16.4)$$

dove R definito come il *rate di convergenza* (o *rate di divergenza*) di $f(t)$. In (16.4) non ha importanza la base del logaritmo. In particolare, se la funzione $f(t)$ somma di esponenziali, si trova che R_f dato dall'argomento dell'esponenziale dominante; quindi $R_g = 2$ e $R_h = \frac{2}{3}$.

La velocit di convergenza all'*agreement* si pu allora stimare studiando la dinamica di

$$v(t) \triangleq \|x(t) - x(\infty)\| = \|(\mathbb{1}w^T + V\Lambda^t W)x(0) - \mathbb{1}w^T x(0)\| = \|V\Lambda^t Wx(0)\|, \quad (16.5)$$

somma di esponenziali di argomento strettamente inferiore ad 1. Allora si ha che $v(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ e, per quanto sopra visto, il *rate* di convergenza dato dall'autovalore dominante della matrice Λ . Tale autovalore, denominato λ_1 , rappresenta il secondo autovalore dominante della matrice P del sistema (16.1); si pu pertanto concludere che $R_v = \lambda_1$.

16.3 Progettazione di P dato un grafo

Si affronta ora un problema di carattere pi pratico, la progettazione della matrice P : solitamente a priori viene fornito un grafo di comunicazioni fra gli agenti, che stabilisce tra quali componenti pu esserci comunicazione, poi la matrice P viene progettata di conseguenza. Come si visto nella sezione precedente, mediante il secondo autovalore dominante λ_1 P in grado di determinare la velocit di convergenza e quindi le prestazioni del sistema in esame; l'obiettivo quindi quello di posizionare λ_1 (e, di conseguenza, tutti gli altri autovalori λ_i $i = 2, \dots, m$) il pi possibile vicino all'origine, per diminuire il valore del *rate* di convergenza e, quindi, accelerare la convergenza a 0.

In generale, problemi di questo tipo sono difficili, poich non si tratta di ottimizzazione convessa; per ricondursi ad una ottimizzazione di tipo convesso ci si restringe a considerare matrici P *simmetriche*, corrispondenti a grafi non orientati. In alternativa si possono usare metodi euristici che, pur non fornendo la soluzione ottima, garantiscono di arrivare ad un risultato. Ad esempio, ricordando che la somma degli elementi sulle righe deve risultare pari ad 1, un'idea quella di contare il numero di nodi ν_i con cui pu comunicare il nodo i e porre i corrispettivi elementi in P pari a $1/\nu_i$. Ci equivale ad eseguire la media aritmetica fra i dati dei nodi 'vicini' $j \in N_i$, assegnando un peso uguale a tutte le diverse opinioni:

$$x_i(t+1) = \sum p_{ij} x_j(t) = \frac{1}{\nu_i} \sum_{j \in N_i} x_j(t), \quad i = 1, \dots, N.$$

Per l'implementazione dell'algoritmo, questo metodo richiede solamente la conoscenza del numero di 'vicini' con i quali il nodo pu comunicare²; altri metodi di progettazione richiedono una conoscenza pi completa del grafo.

Problema. Come progettare una matrice stocastica P che garantisca la convergenza di tutti gli agenti nel *baricentro dello stato iniziale*, ovvero nella media aritmetica

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(0)?$$

Per semplificare la trattazione, si decide di introdurre le matrici *doppiamente stocastiche* (d.s.), ovvero matrici per cui vale

$$P \geq 0, \quad P\mathbb{1} = \mathbb{1}, \quad \mathbb{1}^T P = \mathbb{1}^T;$$

imporre la doppia stocasticit e la convergenza al baricentro dello stato iniziale equivale ad avere in (16.3) $w^T P = w^T$ e $w^T = \frac{1}{N} \mathbb{1}^T$.

Prima si deve risolvere un ulteriore problema: come costruire una matrice P d.s. a partire da un grafo³ \mathcal{G}_P ? Se si conosce completamente tale grafo, esiste un metodo per costruire una matrice d.s. che sfrutta l'idea che combinazioni convesse di matrici d.s. danno ancora una matrice d.s..

Dato che il grafo fortemente connesso, sempre possibile trovare un ciclo (*grafo circolante*) all'interno del grafo⁴; ad esempio, si consideri la configurazione di Fig. 16.1.

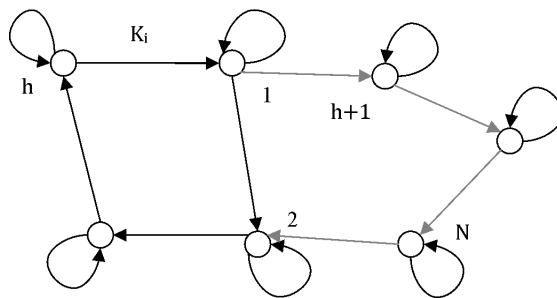


Figure 16.1. Grafo fortemente connesso in cui sono evidenziati un ciclo ed i *self-loop* di ogni vertice.

Partendo da un ciclo, molto facile costruire una matrice d.s. associata al grafo. Infatti, considerando anche i *self-loop*, ad ogni vertice del grafo circolante arrivano due soli archi, che equivale ad avere un numero di vicini pari a 2: per ogni nodo i del ciclo si assegna allora un peso K_i all'opinione del vicino $i - 1$ ed un peso $1 - K_i$ alla propria opinione all'istante precedente (si noti che la somma

²In generale, la comunicazione tra i vari nodi pu avvenire anche in tempi diversi; in tali casi si parla di *metodo decentralizzato*.

³Per garantire la convergenza, il grafo di comunicazioni supposto fortemente connesso.

⁴Un ciclo un cammino in cui il vertice di partenza coincide con il vertice di arrivo.

dei pesi risulta 1). La matrice che ne risulta del tipo

$$P = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 - K_1 & & & & & \\ & K_2 & & & & \\ & & 1 - K_2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & K_M & 1 - K_M \\ \hline & & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{array} \right]$$

in cui si suppone senza perdita di generalità che i nodi attraversati dal ciclo siano i primi M . Il quadrante in basso a destra evidenzia la presenza dei *self-loop*. In questo modo si ottiene una matrice solamente stocastica; se per tutti i K_i vengono presi uguali, ovvero $K_1 = K_2 = \dots = K_M$, allora è facile verificare che P è anche doppiamente stocastica.

Ripetendo l'operazione per tutti i cicli individuabili nel grafo si determinano altre matrici d.s. associate al grafo dato; una loro combinazione opportuna consente di arrivare ad una matrice d.s. compatibile (e che garantisce buone prestazioni) con il grafo di partenza⁵.

Quello mostrato è l'unico metodo per la progettazione di una matrice P d.s. a partire dalla conoscenza del grafo di comunicazioni che sia sempre valido: esso richiede per la conoscenza *globale* del grafo e l'individuazione di tutti i possibili percorsi chiusi. Nel seguito viene esposto un altro metodo, atto al nostro scopo ma applicabile solo in caso di grafi non orientati (*undirected*), dove quindi la matrice delle adiacenze E è simmetrica. L'idea in questo caso è di considerare la matrice P , ora simmetrica, come risultato di

$$P = \Delta + \varepsilon(E - I)$$

e trovare una matrice diagonale Δ ed un opportuno valore ε che rendano stocastica la matrice P . Si noti che è sufficiente ottenere la semplice stocasticità: infatti la simmetria e la stocasticità sono condizioni sufficienti per la doppia stocasticità. Perché P sia stocastica bisogna che abbia $\mathbb{1}$ come autovettore associato all'autovalore 1, $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$; nel caso in esame si ha

$$\Delta\mathbb{1} + \varepsilon(E - I)\mathbb{1} = \mathbb{1},$$

che individua un sistema di N equazioni

$$\delta_i + \varepsilon \sum_{j \neq i} E_{ij} = 1, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (16.6)$$

Nella (16.6) appare il termine $d_i \triangleq \sum_{j \neq i} E_{ij}$, detto *grado* (*degree*) del nodo i : esso rappresenta il numero di archi entranti nel nodo. Il sistema (16.6) non è sufficiente per trovare P , dato che fornisce N equazioni a fronte di $N + 1$ incognite; si sfrutta allora un'altra proprietà richiesta a P ,

⁵Un teorema mostra che tutte le matrici d.s. sono costruibili in questo modo.

ovvero $P \geq 0$ ed, in particolare, sulla diagonale $P > 0$. Deve quindi essere:

$$\delta_i = 1 - \varepsilon d_i > 0 \implies \varepsilon < \frac{1}{d_i} \quad (16.7)$$

che sempre verificata scegliendo $0 < \varepsilon < 1/d_{max}$. Quindi, scelto ε in modo che sia soddisfatta (16.7), la risoluzione del sistema (16.6) consente di determinare la matrice Δ e, quindi, di costruire P .

16.4 Grafi circolanti

Si introduce una particolare categoria di matrici che gode di alcune propriet interessanti.

Matrici circolanti Una generica matrice circolante $P \in \mathbb{R}^{N \times N}$ costruita come segue:

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{N-1} \\ \alpha_{N-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \\ \alpha_2 & & & & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{N-1} & \alpha_0 \end{bmatrix}; \quad (16.8)$$

si pu notare che essa univocamente identificata solamente da N parametri, anzich N^2 parametri come per una matrice qualsiasi.

Grafi circolanti Un grafo detto *circolante* se la sua matrice delle adiacenze circolante. In questo particolare tipo di grafo ogni nodo vede lo stesso ‘panorama’, ovviamente con nodi *partner* diversi.

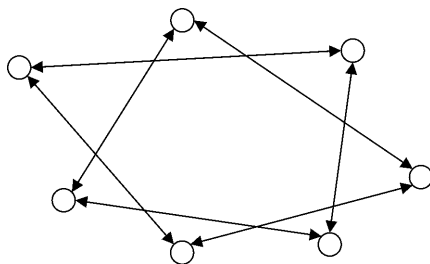


Figure 16.2. Esempio di grafo *undirected* circolante.

Dimostriamo ora che le matrici P ottenute da grafi circolanti sono d.s. ma hanno una bassa velocit di convergenza al *consensus*. Consideriamo una particolare matrice circolante Π di dimensione N e le sue potenze:

$$\Pi = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & \vdots & & 1 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \quad \Pi^2 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right],$$

si nota che Π d.s., ha rango pieno, $\Pi^N = I$ e $\Pi^{N+1} = \Pi$. Inoltre $\Pi^{-1} = \Pi^{N-1} = \Pi^T$ e quindi Π una matrice *ortogonale*. È facile vedere che una generica matrice circolante esprimibile come un polinomio matriciale del tipo

$$P = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Pi^i = \alpha(\Pi); \quad (16.9)$$

le proprietà spettrali di P si possono ottenere pertanto dall'analisi degli autovalori di Π .

Sia allora $u = e^{j\frac{2\pi}{N}}$, che si trova tanto pi vicino ad 1 quanto N grande. L'obiettivo verificare che gli autovalori di Π hanno forma $\lambda_k = u^k$, $k = 1, \dots, N$ e gli autovettori associati hanno forma

$$v_k = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^k \\ u^{2k} \\ \vdots \\ u^{(N-1)k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, N.$$

Procedendo si ottiene:

$$u^0 = 1 = u^N, \quad v_0 = \begin{bmatrix} u^0 \\ \vdots \\ u^0 \end{bmatrix} = \mathbb{1}, \quad \Pi \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \\ \vdots \\ u^{N-1} \end{bmatrix} \quad \Pi v_1 = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^{N-1} \\ u^0 \end{bmatrix} = u v_1$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} u^0 \\ u^2 \\ u^4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \Pi v_2 = \begin{bmatrix} u^2 \\ u^4 \\ u^6 \\ \vdots \end{bmatrix} = u^2 v_2$$

e proseguendo fino a $N - 1$ si verifica quanto ci si era preposti. Si costruisca ora una nuova matrice V che ha sulle colonne gli N autovettori di Π :

$$V = \left[v_0 \mid v_1 \mid v_2 \mid \dots \right]$$

essa permette di diagonalizzare la matrice circolante Π :

$$\Lambda = V^{-1} \Pi V = \begin{bmatrix} u^0 & & & \\ & u & & \\ & & \ddots & \\ & & & u^{N-1} \end{bmatrix}.$$

Riprendendo (16.9), si osserva che la diagonalizzazione di Π permette di arrivare alla diagonalizzazione di P :

$$V^{-1} P V = \sum \alpha_i V^{-1} \Pi^i V = \sum \alpha_i \Lambda^i = \begin{bmatrix} \alpha(u^0) & & & \\ & \alpha(u) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha(u^{N-1}) \end{bmatrix}$$

sfruttando il fatto che $V^{-1} \Pi^i V = \Lambda^i$. Si trova allora che P diagonalizzabile mediante la stessa matrice che diagonalizza anche Π , e gli autovalori⁶ di P sono $\alpha(u^0) = \alpha(1)$, $\alpha(u)$, \dots , $\alpha(u^{N-1})$.

La matrice P di dinamica del sistema deve essere anche stocastica, oltre che circolante; a questo proposito, si aggiungono le condizioni

- i) $\alpha_i \geq 0$ (matrice non negativa);
- ii) $\sum_i \alpha_i = 1$ (1 autovalore relativo all'autovettore $\mathbb{1}$).

Si osserva allora che il secondo autovalore $\alpha(u)$ risulterà essere molto vicino ad 1 se N molto grande e non c'è possibilità di comunicazioni tra nodi distanti ($\alpha_i = 0$ per i elevati): ci motiva il fatto che la velocità di convergenza al *consensus* molto bassa in presenza di grafi di comunicazione circolanti.

Esempio. Sia P matrice circolante

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & & \\ 0 & 1/2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 1/2 & \dots & 0 & & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \Pi^0 + \frac{1}{2} \Pi$$

Pertanto il polinomio $\alpha(x) = \frac{1+x}{2}$, ed il secondo autovalore dominante si trova come

$$\lambda_1 = \frac{1 + e^{j\frac{2\pi}{N}}}{2},$$

$$|\lambda_1|^2 = \frac{1}{4} |1 + e^{j\frac{2\pi}{N}}|^2 = 1 + \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{N} - 1 \right) \simeq 1 - \left(\frac{2\pi}{N} \right)^2$$

in cui si utilizza l'approssimazione della funzione coseno con la serie di Taylor fino al secondo ordine:

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \cos x - 1 \simeq -\frac{x^2}{2}$$

Per N elevato ($N \rightarrow \infty$) si ha $|\lambda_1| \simeq 1$ e questo fornisce un indice sulla lentezza della convergenza al *consensus*.

⁶Si pu dimostrare che $\alpha(1) > \alpha(u) > \dots > \alpha(u^{N-1})$.