

## 15.1 Consensus

### 15.1.1 Nozioni preliminari

L'idea dell'algoritmo del consenso è quello di trovare un punto di accordo tra tutte le variabili (*agenti*) in gioco in un sistema dinamico descritto in forma compatta dall'equazione di aggiornamento vettoriale

$$\mathbf{x}(t+1) = P\mathbf{x}(t) \quad (15.1)$$

con  $P$  matrice stocastica che soddisfa le proprietà:

$$P_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_j P_{ij} = 1$$

che equivale a

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

Si vuole cioè far tendere  $x$  a un vettore di tutte componenti uguali; formalmente

$$\mathbf{x}(t) \rightarrow \alpha\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}$$

e  $x_i(t) \in \Re$

Si vuole innanzi tutto studiare la velocità di convergenza alla condizione di agreement (*consenso*) al variare della matrice  $P$  e quindi delle proprietà del grafo associato.

Si può anticipare qualche risultato che verrà dimostrato nel proseguo: un tipo di grafo *circolante* ha velocità di convergenza bassa e si possono creare delle traiettorie cicliche che rallentano ulteriormente la dinamica desiderata; una situazione intermedia è descritta invece da un grafo *random-geometrico* (i nodi possono comunicare solo entro un certo raggio d'azione, come per esempio i sensori wireless). Il caso migliore è quello di un grafo totalmente casuale, che ha prestazioni migliori se è tempo-variante.

Analizzando la (15.1), per la componente  $i$ -esima del vettore  $\mathbf{x}$  vale

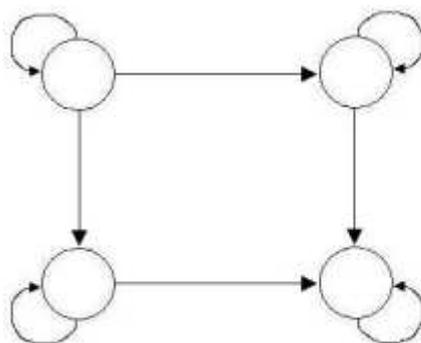
$$x_i(t+1) = \sum_j P_{ij}x_j(t)$$

Definiamo ora il grafo come:

$$G_p = (V, \mathcal{E})$$

dove l'insieme dei vertici (in questo caso gli agenti) è  $V = \{1, \dots, N\}$  e l'insieme degli archi (*edge*) è  $\mathcal{E} \subseteq V \times V$ ; la coppia di vertici  $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow P_{ij} \neq 0$  ovvero l'elemento  $i$ - $j$ -esimo di  $P$  è diverso da zero solo se c'è un arco tra il vertice  $j$  e il vertice  $i$ . La cardinalità di  $\mathcal{E}$ ,  $|\mathcal{E}|$ , si può intendere come indice di quantità di comunicazione possibile del grafo.

A questo punto si ipotizza di avere  $P_{ii} > 0 \forall i$  (ciò non toglie nessuna generalità alla trattazione perchè equivale a supporre che ogni nodo possa sempre comunicare a se stesso la propria informazione); si ipotizza quindi che ogni vertice ha un *self-loop*.



**Figura 15.1.**

Si definisce la matrice delle adiacenze  $E$  i cui elementi sono:

$$E_{ij} = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si può costruire semplicemente  $E$  da  $P$  inserendovi 1 in posizione  $(i, j)$  se l'elemento  $P_{ij} > 0$ , 0 se  $P_{ij} = 0$ . Si consideri ora la matrice  $E^2$  i cui elementi sono dati da:

$$(E^2)_{ij} = \sum_l E_{il} E_{lj}$$

Si nota come per avere un contributo su  $(E^2)_{ij}$ ,  $E_{il}$  e  $E_{lj}$  devono essere entrambi 1. Se questa condizione è verificata significa che esiste il vertice  $l$  tale per cui il percorso da  $j$  a  $i$ , passando per  $l$ , sia di lunghezza 2.

$(E^2)_{ij}$  è quindi il numero di cammini da  $j$  a  $i$  di lunghezza 2. Allo stesso modo  $(E)_{ij} = (E^1)_{ij}$  è il numero di *path* di lunghezza 1 e, genericamente,  $(E^k)_{ij}$  è il numero di *path* di lunghezza  $k$  da  $j$  a  $i$ .

Si osservi che per l'ipotesi fatta di self-loop ad ogni vertice, se esiste un cammino di lunghezza  $k - 1$  tra due vertici, esistono anche cammini di lunghezza  $k$ ,  $\forall k$ .

### 15.1.2 Proprietà spettrali di $P$

Si vanno ora a studiare autovalori e autovettori della matrice stocastica  $P$ ; per fare questo si userà il risultato del Teorema di *Perron-Frobenious*, che fornisce delle caratterizzazioni a matrici non negative in generale (ovvero ogni singolo elemento è non negativo). Le matrici  $P$  e  $E$  appartengono a questa classe di matrici. Prima di enunciare per intero il teorema se ne anticipano i risultati per dare un'idea circa l'influenza che essi hanno sulla dinamica di convergenza alla condizione di agreement in un problema di consensus.

Il Teorema di Perron-Frobenious dimostra che per le matrici non negative esiste un autovalore dominante  $\lambda_0$  di modulo maggiore rispetto a tutti gli altri e che il suo miniblocco di Jordan ha dimensione 1.  $E$  può essere riscritta come:

$$E = T^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda \end{array} \right] T$$

con  $\Lambda$  sottomatrice di Jordan dimensione  $(N-1) \times (N-1)$  corrispondente agli altri autovalori che hanno modulo minore di  $\lambda_0$ .

Per la proprietà delle matrici di Jordan,

$$E^k = T^{-1} \left[ \begin{array}{c|c} \lambda_0^k & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^k \end{array} \right] T$$

Le matrici  $T^{-1}$  e  $T$  si possono riscrivere mettendo in evidenza rispettivamente la prima colonna e la prima riga:

$$T^{-1} = [ v_0 \mid V ] \quad T = \left[ \begin{array}{c} w_0^T \\ \hline W \end{array} \right]$$

da cui

$$TT^{-1} = \left[ \begin{array}{c} w_0^T \\ \hline W \end{array} \right] [ v_0 \mid V ] = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]$$

Con questa notazione si ha che

$$E^k = [ v_0 \mid V ] \left[ \begin{array}{c|c} \lambda_0^k & 0 \\ \hline 0 & \Lambda^k \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} w_0^T \\ \hline W \end{array} \right] = \lambda_0^k v_0 w_0^T + V \Lambda^k W \cong \lambda_0^k v_0 w_0^T$$

per  $k \rightarrow \infty$ , visto che  $\lambda_0$  è l'autovalore di modulo maggiore.

Da notare che essendo  $(E^k)_{ij}$  l'elemento  $(i, j)$  di  $\lambda_0^k v_0 w_0^T$  per  $k$  sufficientemente grande,  $\lambda_0$  deve essere necessariamente reale e positivo, non potendo il numero di path di dimensione  $k$  essere negativo.

Si consideri ora un grafo completo, in cui cioè

$$E = \mathbf{1}\mathbf{1}^T$$

$$E^k = \overbrace{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}^1 \overbrace{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}^2 \cdots \overbrace{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}^k = N^k \frac{\mathbf{1}\mathbf{1}^T}{N}$$

visto che  $\mathbf{1}^T \mathbf{1} = N$ . In questo caso risulta  $\lambda_0 = N$ , mentre per un grafo generico  $\lambda_0 \leq N$ .

**Teorema (di Perron-Frobenius):** Se una matrice  $A > 0$  allora esiste un vettore  $\mathbf{v}_0 > 0$  e un autovalore  $\lambda_0 > 0$  tali che:

1.  $A\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0$
2.  $\Delta_A(s) = (s - \lambda_0)^{\mu_0} (s - \lambda_1)^{\mu_1} \cdots (s - \lambda_k)^{\mu_k}$ 
  - (a)  $\mu_0 = 1$
  - (b)  $|\lambda_i| < \lambda_0$

Anche intuitivamente si capisce che l'importante è il valore del modulo del secondo autovalore più grande ( $\lambda_1$  se si usa un ordinamento decrescente).

Da un punto di vista grafico è come se gli autovalori fossero allocati come in Fig.15.2.

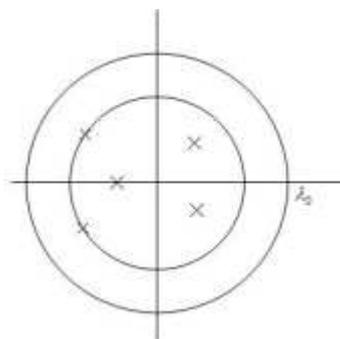


Figura 15.2.

Si vedranno ora un paio di applicazioni del Teorema alle matrici stocastiche.

### Caso 1: $P > 0$

Visto che  $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$  per definizione di matrice stocastica,  $\mathbf{1}$  è autovettore di  $P$  associato all'autovalore destro 1. Si dimostra ora che  $\lambda_0$  è proprio 1.

*Dimostrazione:* Per il teorema di Perron-Frobenius  $\exists \lambda_0, \mathbf{v}_0$  perchè  $P > 0$ , quindi

$$P\mathbf{v}_0 = \lambda_0\mathbf{v}_0 \quad (15.2)$$

La componente  $i$ -esima di (15.2) risulta

$$\sum_j P_{ij}v_j = \lambda_0v_i \quad (15.3)$$

Si definiscono ora  $M = \max(v_j)$  e  $m = \min(v_j)$ . Sostituendo tali valori nell'equazione (15.3) si ottengono un limite superiore e inferiore per  $\lambda_0 v_i$ :

$$m \leq \lambda_0 v_i \leq M$$

( $\sum_j P_{ij} m = m \sum_j P_{ij} = m$  perchè  $P$  matrice stocastica; lo stesso vale naturalmente per  $M$ ). Visto che  $\exists v_h = m$ ,  $v_k = M$  e che  $m \leq \lambda_0 v_i \leq M \forall i$ , si valuta tale disuguaglianza per  $i = h$  e  $i = k$ . Nel primo caso

$$m \leq \lambda_0 v_h = \lambda_0 m$$

da cui visto che  $m > 0$ ,  $\lambda_0 \geq 1$ .

Nel secondo caso

$$\lambda_0 M = \lambda_0 v_k \leq M$$

da cui visto che  $M > 0$ , si ottiene  $\lambda_0 \leq 1$ . Combinando i due risultati si trova  $\lambda_0 = 1$ .

Si è così dimostrato che per le matrici stocastiche il più grande autovalore reale la cui esistenza è garantita dal teorema di Perron-Frobenius.

Si analizza ora il problema iniziale di consensus (15.1) per  $P > 0$  e sfruttando quanto appena dimostrato. Lo stato ha evoluzione dinamica data da:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P^t \mathbf{x}_0 \\ P &= \left[ v_0 \mid V \right] \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \Lambda \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} w_0^T \\ \hline W \end{array} \right] \\ P^t &= \lambda_0^t \mathbf{v}_0 \mathbf{w}_0^T + V \Lambda^t W \end{aligned}$$

Il secondo addendo della terza equazione tende a 0 perchè ha tutti autovalori con modulo minore di 1, quindi

$$\begin{aligned} P^t &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_0 \mathbf{w}_0^T = \mathbf{1} \mathbf{w}_0^T \\ \mathbf{x}(t) &= P^t \mathbf{x}_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{1} \mathbf{w}_0^T x(0) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si arriva cioè alla condizione di agreement in cui  $\alpha = \sum_i w_i x_i(0)$  ovvero il valore finale di consenso è combinazione lineare delle condizioni iniziali.

Si può inoltre dimostrare che  $\mathbf{w}_0^T P = \mathbf{w}_0^T$ , ovvero che  $\mathbf{w}_0$  è autovettore sinistro di  $P$ . Il vettore  $\mathbf{w}_0$  dà quindi il peso alle condizioni iniziali sul valore di agreement.

Si può concludere che per matrici stocastiche  $P > 0$  si arriva sempre a un agreement dato dalla combinazione lineare delle condizioni iniziali e i pesi di queste sul valore finale del consenso sono dettati dagli elementi dell'autovettore sinistro di  $P$ ,  $\mathbf{w}_0$ .

**Caso 2:**  $\exists k | P^k > 0$

In queste condizioni non è detto che  $P > 0$ ; succede però che visto che  $P$  è stocastica, anche  $P^k$  lo è ( $P\mathbf{1} = \mathbf{1} \Rightarrow P^k\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ).

Se gli autovalori di  $P$  sono

$$\lambda(P) = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_h\}$$

gli autovalori di  $P^k$  risultano

$$\lambda(P^k) = \{\lambda_0^k, \lambda_1^k, \dots, \lambda_h^k\}$$

Tra questi, per il Teorema di Perron-Frobenius, ne esiste sicuramente uno dominante, ad esempio sia esso  $\lambda_0^k$ ; visto che  $P^k$  è stocastica e  $P^k > 0$ , per quanto appena visto,  $\lambda_0^k = 1$ , quindi  $\lambda_0 = 1$ .

Gli altri autovalori  $\lambda_i^k$  saranno in modulo minori di 1, quindi  $|\lambda_i| < 1$ .

Si può concludere che, data una matrice stocastica  $P$  e  $\exists k | P^k > 0$ , si ritorna all'analisi effettuata al caso 1 e valgono tutte le osservazioni già fatte.

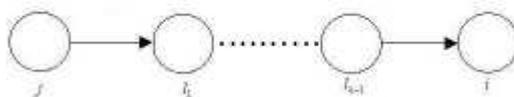
Il problema ora è verificare se esiste  $k$  che soddisfa la condizione  $P^k > 0$ . La risposta si trova analizzando il grafo associato a  $P$ : condizione necessaria e sufficiente è che il grafo sia fortemente connesso.

*Definizione:* Il grafo  $G_P$  associato alla matrice stocastica  $P$  è detto fortemente connesso se e solo se fissati due vertici  $i$  e  $j$ , esiste sempre un percorso che va da  $j$  a  $i$ .

*Lemma* Se  $P$  è una matrice stocastica,  $(P^k)_{ij} > 0 \Leftrightarrow \exists$  un percorso in  $G_P$  di lunghezza  $k$  che va da  $j$  a  $i$ .

*Dimostrazione* La dimostrazione si fa per induzione:

- per  $k = 1$  è ovvio:  $P_{ij} > 0 \Leftrightarrow \exists$  un arco da  $j$  a  $i$ .
- (si dimostra solo la sufficienza del Lemma ( $\Leftarrow$ )).  
Si supponga che il risultato sia vero per  $k - 1$ , esiste cioè un percorso da  $j$  a  $i$  di lunghezza  $k - 1$ .



**Figura 15.3.**

Allora

$$(P^k)_{ij} = (P^{k-1}P)_{ij} = \sum_l (P^{k-1})_{il}P_{lj} \geq (P^{k-1})_{i,l_1}P_{l_1,j} > 0$$

L'ultima disuguaglianza vale in quanto  $(P^{k-1})_{i,l_1} > 0$  per l'ipotesi di induzione,  $P_{l_1,j} > 0$  per definizione di grafo: esiste un percorso da  $j$  a  $i$ , quindi anche da  $j$  a  $l_1$ : allora  $P_{l_1,j} > 0$ .

La necessarietà del Lemma ( $\Rightarrow$ ) si dimostra in modo del tutto analogo.

Applicando il Lemma appena visto per tutti gli  $i$  e  $j$  si può concludere che:

**Teorema**  $G_P$  è fortemente connesso  $\Leftrightarrow \exists k | P^k > 0$ .

Vengono ora proposti alcuni esempi.

1.  $P = I \Rightarrow P^k = I \forall k$ . In queste condizioni non avviene mai che  $P^k > 0$  per qualche  $k$ , quindi non si arriva mai a una condizione di agreement: anche intuitivamente si capisce che questo non possa avvenire in quanto nessun agente comunica con gli altri.

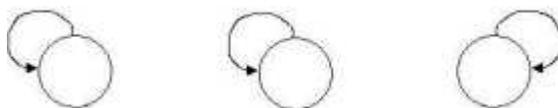


Figura 15.4.

- 2.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Graficamente si ha:

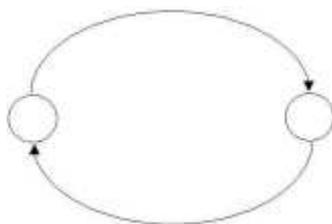


Figura 15.5.

$$P^k = \begin{cases} I & k \text{ pari} \\ P & k \text{ dispari} \end{cases}$$

Il grafo di Fig. 15.5 risulta essere fortemente connesso, ma non è presente il self loop necessario per applicare i risultati ottenuti.

3.

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente:

**Figura 15.6.**

Il grafo non è fortemente connesso e

$$P^k = \begin{bmatrix} 2^{-k} & 1 - 2^{-k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} x_2(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

In questo caso avviene l'agreement, pesando però solo una delle due opinioni iniziali.