PSC: Progettazione di sistemi di controllo **a.a. 2010-2011**

Lezione 11 — 9 Novembre 2010

Docente: Luca Schenato *Stesori: Corfini C., Fauri D., Milesi E.*

11.1 Interpolatore di Kalman (Kalman Smoother)

Consideriamo ora il problema di stimare la densità di probabilità a posteriori date tutte le misure.

$$p(x_k|Y^T) = \frac{p(x_k|Y^{k-1})p(x_t|\tilde{Y}^k)}{p(x_k)}$$

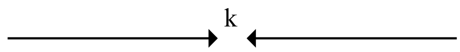
dove

$$p(x_k|Y^{k-1})$$

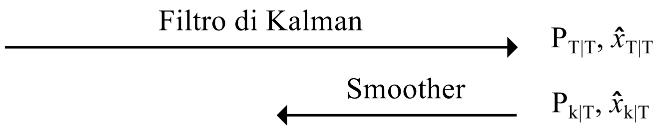
è il Filtro di Kalman "in avanti" con $P_{0|-1} = P_0$, ed il rapporto

$$\frac{p(x_t|\tilde{Y}^k)}{p(x_k)}$$

rappresenta il Filtro di Kalman "all'indietro", con $P^{-1}_{T|T+1} = 0$.
Osservazione: Nel caso in cui $\exists A^{-1}$ è possibile ottenere l'interpolatore di Kalman tramite la fusione di due filtri di Kalman, uno in avanti e uno all'indietro come visto nella precedente lezione:



Un'altra possibilità che invece non richiede l'invertibilità della matrice A e' ottenuta facendo una passata completa del filtro di Kalman in avanti e poi una passata all'indietro per ottenere l'interpolatore:

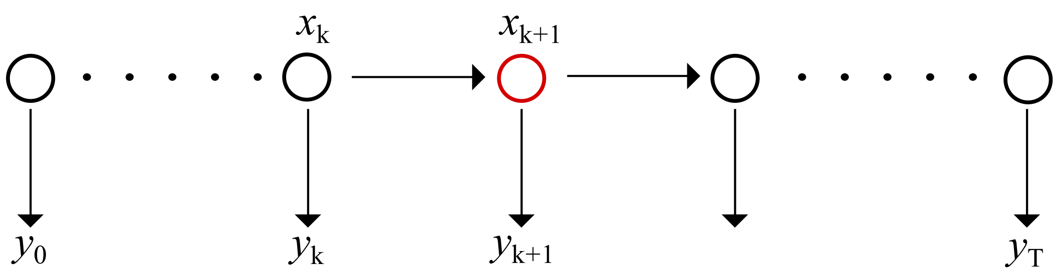


$$p(x_k|Y^T) = \mathcal{N}_{x_k}(\hat{x}_{k|T}, P_{k|T})$$

$$
\begin{aligned}
p(x_k|Y^T) &= \int_{x_{k+1}} p(x_k, x_{k+1}|Y^T)\, dx_{k+1} \qquad \text{(applicando marginalizzazione)} \\
&= \int_{x_{k+1}} p(x_k|x_{k+1}, Y^T) p(x_{k+1}|Y^T)\, dx_{k+1} \qquad \text{(applicando la formula Bayes)} \\
&= \int_{x_{k+1}} p(x_k|x_{k+1}, Y^k) p(x_{k+1}|Y^T)\, dx_{k+1} \quad (x_k \text{ dipende dalle misure fino a } k) \\
&= \int_{x_{k+1}} \frac{p(x_{k+1}|x_k, Y^k) p(x_k|Y^k)}{p(x_{k+1}|Y^k)} p(x_{k+1}|Y^T)\, dx_{k+1} \\
&= \int_{x_{k+1}} \frac{p(x_{k+1}|x_k) p(x_k|Y^k)}{p(x_{k+1}|Y^k)} p(x_{k+1}|Y^T)\, dx_{k+1} \quad (x_{k+1} \text{ non dipende da } Y^k)
\end{aligned}
$$

con

- $p(x_{k+1}|x_k, Y^k)$ dinamica
- $p(x_k|Y^k)$ filtro di Kalman
- $p(x_{k+1}|Y^k)$ predittore di Kalman ad un passo
- $p(x_{k+1}|Y^T)$ smoother (noto)

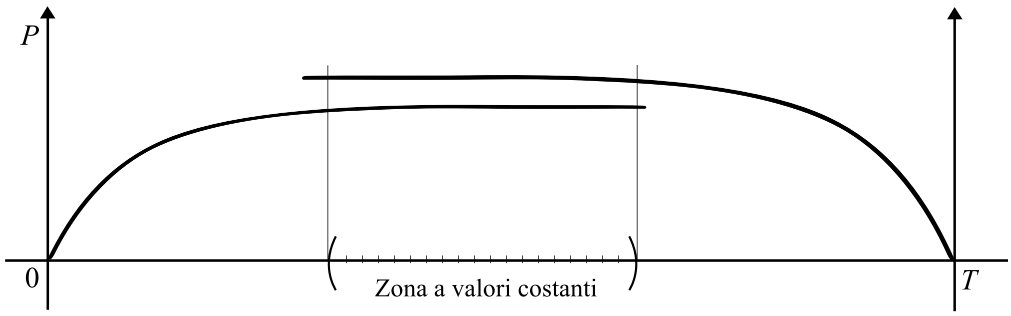


Presuppongo che siano noti

- $p(x_{k+1}|Y^T) = \mathcal{N}_{x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|T}, P_{k+1|T})$
- $p(x_{k+1}|x_k) = \mathcal{N}_{x_{k+1}}(Ax_k, Q)$
- $p(x_k|Y^k) = \mathcal{N}_{x_k}(\hat{x}_{k|k}, P_{k|k})$
- $p(x_{k+1}|Y^k) = \mathcal{N}_{x_{k+1}}(\hat{x}_{k+1|k}, P_{k+1|k}) = \mathcal{N}_{x_{k+1}}(A\hat{x}_{k|k}\ , AP_{k|k}A^T + Q)$

Posso calcolare

$$
p(x_k|Y^T) = \int_{x_{k+1}} \mathcal{N}_{\left[\begin{smallmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{smallmatrix}\right]} \left(\left[\begin{array}{c} \mu_1 \\ \mu_2 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array} \right] \right) dx_{k+1}
$$



con $\mu_1 = \hat{x}_{k|T}$, $\Sigma_{11} = P_{k|T}$, $\mu_2 = \hat{x}_{k+1|T}$, $\Sigma_{22} = P_{k+1|T}$.

Quindi, data la gaussianità delle densità di probabilità, si ha che

$$p(x_k|Y^T) \propto \exp\{-\frac{1}{2}\underbrace{(\textit{termini quadratici in } x_x, x_{k+1})}_{(\star)}\}$$

$$\begin{aligned}(\star) &= (x_{k+1} - Ax_k)^T Q^{-1}(x_{k+1} - Ax_k) + (x_k - \hat{x}_{k|k})^T P_{k|k}^{-1}(x_k - \hat{x}_{k|k}) + \\ &+ (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|T})^T P_{k+1|T}^{-1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|T}) - (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})^T P_{k+1|k}^{-1}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1|k})\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T Q^{-1} A + P_{k|k}^{-1} & -Q^{-1}A \\ -A^T Q^{-1} & Q^{-1} + P_{k+1|T}^{-1} - P_{k+1|k}^{-1} \end{bmatrix}$$

Applicando la formula per l'inversione di una matrice a blocchi e il Lemma di inversione di matrice si ottiene:

$$\begin{aligned}&P_{k|T} = \Sigma_{11} = P_{k|k} + L_k(P_{k+1|T} - P_{k+1|k})L_k^T \\ &L_k = P_{k|k}A^T P_{k+1|k}^{-1} = P_{k|k}A^T(AP_{k|k}A^T + Q)^{-1} \\ &\hat{x}_{k|T} = \mu_1 = \hat{x}_{k|k} + L_k(\hat{x}_{k+1|T} - A\hat{x}_{k|k})\end{aligned}$$

dove sono state sfruttate le formule di Bayes, marginalizzazione, gaussianità, Lemma di inversione di una matrice.

11.2 Filtro di Kalman visto come SLTV

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k+1} &= A\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}(y_{k+1} - CA\hat{x}_{k|k}) \\ &= (I - K_{k+1}C)A\hat{x}_{k|k} + K_{k+1}y_{k+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k-1} + AK_k(y_k - C\hat{x}_{k|k-1}) \\ &= A(I - K_kC)\hat{x}_{k|k-1} + AK_ky_k\end{aligned}$$

Introducendo le matrici che formano il filtro in spazio di stato:

$$\begin{aligned}&F_k = A(I - K_kC) \\ &G_k = AK_k \\ &H_k = I \\ &D_k = 0\end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{cases}\hat{x}_{k+1|k} &= F_k\hat{x}_{k|k-1} + G_ky_k \\ \hat{x}_{k|k} &= H_k\hat{x}_{k|k-1}\end{cases}$$

Se $k \to +\infty \quad \Rightarrow \quad K_k \to K_\infty$

$$\begin{aligned}&F = A(I - K_\infty C) \\ &G = AK_\infty \\ &H = I \\ &D = 0\end{aligned}$$

Usando fin dal primo istante il guadagno costante K_∞, il predittore di Kalman perde la tempo-varianza e diventa un filtro LTI.

La predizione si calcola quindi ricorsivamente:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= F\hat{x}_{k|k-1} + Gy_k \\ &= F(F\hat{x}_{k-1|k-2} + Gy_{k-1}) + Gy_k \\ &\vdots \\ &= F^{k+1}\hat{x}_{0|-1} + \sum_{h=0}^{k} F^{k-h}Gy_h\end{aligned}$$

Essendo la matrice di aggiornamento di stato F strettamente stabile in quanto ottenuta sotto ipotesi di stabilizzabilità della soluzione a regime del filtro di Kalman, F^n decresce all'aumentare di n; la predizione assume perciò la forma di una combinazione convessa delle misure precedenti:

$$\hat{x}_{k+1|k} \simeq \sum_{h=0}^{k} \Phi_{k-h} y_h,$$

dove Φ_{k-h} sono i pesi assegnati alle misure y_h (le misure più recenti vengono pesate maggiormente), cioè $\Phi_n \to 0$ esponenzialmente per $n \to +\infty$. In maniera analoga è possibile far vedere che anche la stima dell'interpolatore di Kalman puo' essere scritta come:

$$\hat{x}_{k|T} \simeq \sum_{h=0}^{T} \Phi_{k-h} y_h,$$

Pesando assieme le due passate di predittore e smoother, le Φ_n si distribuiscono attorno all'istante k come in figura, cioè $\Phi_n \to 0$ esponenzialmente per $n \to \pm\infty$.