PSC: Progettazione di sistemi di controllo	a.a. 2010-2011
Esercitazione 2 — 27 Novembre 2010	
Docente: Luca Schenato	*Stesori: Luca Schenato*

I seguenti esercizi sono in parte esercitazioni MATLAB e in parte analitiche. Le parti MATLAB devo essere svolte preparando uno o piu' file MATLAB tipo *Esercitazione1Ex1a.m*, *Esercitazione1Ex1b.m* che dovranno essere spediti tramite email a schenato@dei.unipd.it. Le parti analitiche riguardanti le risposte alle domande qui sotto, devono essere scritte possibilmente in latex (usate pure il template di questa esercitazione se preferite). Non e' necessario riportare le figure delle simulazioni nel testo, purche' queste siano presenti nel momento in cui faro' girare i file MATLAB che mi avete spedito.

2.1 Algoritmi di Consenso

Esercizio 1: Grafi circolanti costanti In questo esercizio andremo ad analizzare la prestazione di algoritmi di consensus applicati a diversi tipi di grafi costanti nel tempo. Si generino N punti in maniera uniforme nel piano complesso $[0,1]\times[0,1]$ ($x_0 = rand(N,1) + sqrt(-1) * rand(N,1)$). Si costruiscano della matrici circolanti in modo tale che ogni vertice del grafo comunichi con gli ℓ vertici alla sua destra utilizzando un peso uniforme

$$P = \begin{bmatrix} 1/(\ell+1) & 1/(\ell+1) & 1/(\ell+1) & 0 & \dots \\ 0 & 1/(\ell+1) & 1/(\ell+1) & 1/(\ell+1) & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1/(\ell+1) & 1/(\ell+1) & 0 & 0 & 1/(\ell+1) \end{bmatrix}$$

Si valuti la velocita' di convergenza al variare di N e ℓ visualizzando il movimento dei punti $x_i(k)$ sul piano complesso e facendo il grafico di della velocita' di convergenza , cioe' $\log(d^2(k))$ in funzione del tempo k dove $d^2(k) = ||x(k) - \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T x(k)||^2$, cioe' la somma dei quadrati delle distanze di ogni elemento di x dal suo baricentro istantaneo.

Esercizio 2: Grafi geometrici random statici Si generino N punti in maniera uniforme nel piano complesso $[0,1]\times[0,1]$ ($x_0 = rand(N,1) + sqrt(-1) * rand(N,1)$) e si consideri il grafo non-orientato i cui archi sono dati dai nodi che sono sufficientemente vicini tra di loro, cioe' (i,j) e' un arco se e solo se $||x_0(i) - x_0(j)|| \leq r$ dove $r > 0$. Si verifichi che il grafo sia fortemente connesso, cioe' non ci siano gruppi di punti disgiunti, altrimenti si generino nuovamente altri N punti in maniera casuale finche il grafo non sia fortemente connesso. Si costruiscano delle matrici doppiamente stocastiche utilizzando i due metodi presentati in classe, cieo' utilizzando i pesi di Metropolis oppure dei pesi uniformi. Nel caso di Metropolis i pesi degli archi fuori diagonale sono scelti come $P_{ij} = \frac{1}{\max(d_i,d_j)+1}$ mentre i pesi sulla diagonale come $P_{ii} = 1 - \sum_{j,i\neq j} P_{ij}$, dove d_i e' il numero di archi del nodo i senza includere il self-loop.

Nel caso dei pesi uniformi si scelga $P_{ij} = \epsilon$ fuori diagonale e $P_{ii} = 1 - \sum_{j,i\neq j} P_{ij} = 1 - \epsilon d_i$ sulla diagonale, dove $0 < \epsilon < \frac{1}{\max d_i}$. Si assuma che le matrici P rimangano costanti nel tempo, cioe' gli archi vengono generati solo al momento della scelta delle condizioni iniziali e non vengono modificati anche se nel tempo due punti che inizialmente erano lontani si trovano ad essere piu' vicini di una distanza r. Si confronti la velocita' di convergenza di questi due schemi per diversi valori di r (o N) e di ϵ. In genere e' meglio scegliere ϵ grande o piccolo?

Esercizio 3: Grafi dipendenti dalla distanza Si consideri un grafo geometrico random costruito come in precedenza che sia fortemente connesso. Si costruisca *ad ogni passo* una matrice P semplicemente stocastica che faccia muovere ogni veicolo verso il baricentro dei veicoli, incluso se stesso, che si trovano ad una distanza inferiore ad r. In questo caso gli elementi di ogni riga (incluso quello sulla diagonale) sono uguali $P_{ij}(k) = \frac{1}{d_i(k)+1}$ dove $d_i(k)$ e' il numero di vicini del nodo i all'istante k. Si visualizzi la dinamica dei nodi. I veicoli convergono sempre ad un punto comune? In caso negativo quali sono le ragioni che fanno si che il grafo si disconnetta pur partendo da una configurazione in cui il grafo di partenza e' fortemente connesso e ad ogni passo il poligono che contiene tutti i punti non puo' crescere?

Esercizio 4: Grafi tempo varianti e randomizzati Si consideri un grafo geometrico random costruito come nel caso dell'Esercizio 2 che sia fortemente connesso (cioe' il grafo di connettivita' e' scelto all'inizio e poi non viene piu' cambiato). Si consideri un algoritmo di comunicazione broadcast, cioe' un algoritmo in cui un solo nodo i alla volta di accende e comunica la sua posizione ai nodi j con cui e' connesso. Tutti i nodi j aggiornano la loro posizione facendo la media tra le due posizioni, cioe' $P_{ji} = 1/2$ e $P_{jj} = 1/2$ (si noti che si aggiorna P_{ji} e non P_{ij}). Si confrontino due schemi: uno deterministico che "accende" i nodi in sequenza (round-robin) e uno che "accende" un nodo in modo casuale uniforme ad ogni istante. Si confronti la velocita' di convergenza dei due schemi per diversi grafi random. Il punto finale coincide con la media iniziale? In media se aumento il numero di nodi come varia la distanza del punto finale dalla media iniziale? Dare una spiegazione intuitiva

Esercizio 5: Grafi statici e grafi randomizzati Si generino N punti in maniera uniforme nel piano complesso $[0,1]\times[0,1]$ ($x_0 = rand(N,1) + sqrt(-1) * rand(N,1)$). Si costruisca la matrice circolante in modo tale che ogni vertice del grafo comunichi con il vicino alla sua destra e si utilizzi come peso $1/2$, cioe' $P = 0.5I + 0.5\Pi$ dove $\Pi = \begin{bmatrix} 0 & I_{N-1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e' la matrice circolante definita a lezione. Si consideri invece una $P_r(k)$ randomizzata ottenuta facendo comunicare ogni nodo con un altro nodo scelto a caso utilizzando sempre come peso $1/2$ ad ogni passo k, in questo modo ad ogni passo ogni veicolo riceve informazione da solamente un altro veicolo. Si noti come il grafo ad ogni istante sia non connesso con probabilita' altissima. Si confronti la prestazione dei due schemi al variare del numero dei veicoli N. Come varia la velocita' di convergenza (in media per il caso randomizzato) al variare del numero di nodi N? Come mai lo schema randomizzato risulta molto piu' veloce? Cercare di dare una spiegazione logica.

Facoltativo: Si calcoli in maniera esplicita la velocita' di convergenza dei due schemi (cioe' come decresce la somma dei quadrati della distanza dal baricentro istantaneo $d^2(k)$, e la varianza d'errore dalla media iniziale $\beta = \frac{1}{N}\mathbb{E}[||x_A(\infty) - x_A(0)||^2]$ al variare del numero di nodi N. Suggerimento: per il calcolo con dello schema randomizzato si proceda come illustrato nell'articolo di Zampieri-Fagnani e nell'articolo `http://www.dei.unipd.it/~schenato/PAPERS/NHM_rendezvous_final_v1.pdf` in particolare il Lemma 4.