PSC: Progettazione di sistemi di controllo **2009**

Esercitazione 1 — 6 Novembre 2009

Docente: Luca Schenato *Stesori: Luca Schenato*

I seguenti esercizi sono in parte esercitazioni MATLAB e in parte analitiche. Le parti MATLAB devo essere svolte preparando uno o piu' file MATLAB tipo *Esercitazione1Ex1a.m*, *Esercitazione1Ex1b.m* che dovranno essere spediti tramite email a schenato@dei.unipd.it. Le parti analitiche riguardanti le risposte alle domande qui sotto, devono essere scritte possibilmente in latex (usate pure il template di questa esercitazione se preferite). Non e' necessario riportare le figure delle simulazioni nel testo, purche' queste siano presenti nel momento in cui faro' girare i file MATLAB che mi avete spedito.

Esercizio 1: Inseguimento di un veicolo In questo esercizio di andra' ad applicare il filtro di Kalman per la stima di posizione di un veicolo mobile di cui non si conosce il comportamento a priori. A tele scopo consideriamo un veicolo bidimesionale la cui dinamica e' data da $\ddot{p_x} = u_x$ e $\ddot{p_y} = u_y$, dove (p_x, p_y) e' la sua posizione rispetto ad un sistema di riferimento fisso e (u_x, u_y) sono le forze generate dai suoi motori. Si tratta in pratica della dinamica di un oggetto di massa unitaria senza attrito. Poiche' gli ingressi non sono noti a priori, una tecnica molto usata e' quella di modellare un comportamento non noto a priori ussumendo che gli ingressi (u_x, u_y) siano delle variabili aleatorie gaussiane. Per prima cosa si discretizza la dinamica con tempo di campionamento $T = 0.1$ e si utilizza una rappresentazione in spazio di stato dove lo stato $x = (p_x, v_x, p_y, v_y) \in \mathbb{R}^4$, dove (v_x, v_y) sono le velocita' istantanee. La dinamica discretizzata e' data da:

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k,\ w_k \sim \mathcal{N}(0, Q),\ \ A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \ Q = q{*}0.01 \begin{bmatrix} 0.01 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $q \in \mathbb{R}, q \geq 0$ e' l'effetto di (u_x, u_y) e' stato sostituito dal disturbo di processo w_k. Si assume poi che il processo di misura $y = (y_x, y_y)$ corrisponda alla misura della posizione (p_x, p_y) del veicolo soggetto a rumore gaussiano, cioe':

$$y_k = Cx_k + v_k,\ v_k \sim \mathcal{N}(0, R),\ \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ \ R = r \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

dove $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$. Si noti come, per costruzione, la dinamica e il processo di misura lungo l'asse x e lungo l'asse y sia disaccoppiata e identica, e quindi si potrebbe scomporre la dinamica del sistema di dimensione $n = 4$ come l'unione di due sistemi uguali di dimensione $n = 2$, semplificando notevolmente le equazioni. Si assuma infine che la posizione iniziale non sia nota ma si possa approssimare come una variabile aleatoria gaussiana:

$$x_0 \sim \mathcal{N}(0, P_0), \quad P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Si implementino le equazioni del **filtro di Kalman** per $q = r = 1$. Si facciano alcune simulazioni per verificare la prestazione dello stimatore con almeno 100 passi. Si inizializzi[1] la posizione del veicolo con

$$x_0 = [1\ 1\ 2\ 1]^T.$$

2. Si implementi le equazioni di un **filtro statico ottimo**, cioe' con guadagno del filtro ottenuto dal filtro di Kalman a regime. Si confrontino le prestazioni di questo stimatore con lo stimatore di Kalman utilizzando le stesse condizioni iniziali e la stessa realizzazione delle variabili aleatorie, cioe' w_k, v_k devono essere gli stessi[2].

3. Si implementi lo **smoother di Kalman** utilizzando tutta la sequenza delle misure. Si confrontino le prestazioni di questo stimatore con il filtro di Kalman standard con le stesse condizioni iniziali e la stessa realizzazione delle variabili aleatorie

4. Si visualizzi nel piano x-y la dinamica del veicolo reale e di un veicolo virtuale che utilizza la stimatore per la posizione e velocita'. Si usino la funzione $\mathsf{plot\_car}(p^x_k, p^y_k, \theta_k)$ calcolando l'angolo di orientamento tramite la funzione $\theta_k = \mathsf{atan2}(v^y_k, v^x_k)$. Si sovrapponga al veicolo virtuale il grafico dell'ellisse di confidenza di probabilita' 99% solitamente detto 3σ che si ottiene con $\mathsf{plot\_ellipse}(p^x_k, p^y_k, 9 * P^{pos}_{k|k})$, cioe' con probabilita' del 99% la posizione reale del veicolo e' all'interno dell'ellisse, dove

$$P^{pos}_{k|k} = \begin{bmatrix} P_{k|k}(1,1) & P_{k|k}(1,3) \\ P_{k|k}(3,1) & P_{k|k}(3,3) \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2: Hidden Markov Models. In questo esercizio di andra' ad applicare lo stimatore ottimo per Hidden Markov models. Si consideri un modello di comunicazione nel quale T coppie di bit (ovvero $2T$ bit), vengono spedite attraverso un canale binario simmetrico, nel quale un bit e' ricevuto correttamente con probabilita' ϵ e con probabilita' $1-\epsilon$ e' invertito, indipendentemente dal bit precedenti o successivi (i.i.d). Si indichi ogni coppia di bit con $x_t \in \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dove $t = 0, T-1$ e $v_1 = (00), v_2 = (01), v_3 = (10), v_3 = (11)$ rappresentano le 4 possibile coppie di bit trasmessi. La sequeza dei $2T$ bit trasmessi e' data dalla concatenazione di $x_1, x_2, \ldots, x_{T-1}$. L'obiettivo del ricevitore e' di ricostruire tale

[1] Ovviamente lo stimatore va inizializzato con $\hat{x}_0 = 0$.

[2] In MATLAB le variabili aleatorie (v_k, w_k) si possono generare facilmente tramite i comandi $w_k = \mathsf{sqrtm}(Q) * \mathsf{randn}(4,1), v_k = \mathsf{sqrtm}(R) * \mathsf{randn}(2,1)$.

sequenza in base alle coppie di bit ricevute. Le osservazioni sono date da $y_t \in \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ dove $t = 0, T-1$ e $w_1 = (00), w_2 = (01), w_3 = (10), w_3 = (11)$. In base al modello di canale binario simmetrico, il modello di osservazione e' il seguente

$$\mathbb{P}[y_t = w_i | x_t = v_j] = (1-\epsilon)^{2-d}\epsilon^d$$

dove $d = h_d(w_i, v_j)$ e' la distanza di Hamming tra le due coppie w_i e v_j, cioe' il numero di bit per cui differiscono. Per esempio $h_d(w_1, v_1) = 0$, $h_d(w_1, v_2) = 1$, $h_d(w_1, v_3) = 1$, $h_d(w_1, v_4) = 2$. La sequenza x_t e' generata in base ad un catena di Markov definita dalla matrice stocastica $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ dove $[A]_{ij} = \mathbb{P}[x_{t+1} = v_j | x_t = v_i]$ e la matrice e' data da:

$$A = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

Si parta inoltre dal presupposto di non avere alcuna conoscenza a priori sullo stato iniziale x_0, cioe $\mathbb{P}[x_0 = v_i] = 0.25, \forall i$. Si considerino sequenze di lunghezza $T = 20$. Si proceda alla stima della sequenza $x_{0:T-1}$ come segue

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{x}}_{t|t} &= \operatorname{argmax}_{x_t=v_i} \max_{x_{0:t-1}} p(x_{0:t-1}, x_t = v_i, y_{0:t}) \quad \text{(filtro alla Viterbi)} \\
\hat{\hat{x}}_{t|T} &= \operatorname{argmax}_{x_t=v_i} \max_{x_{0:t-1}, x_{t+1:T-1}} p(x_{0:t-1}, x_t = v_i, x_{t+1:T-1}, y_{0:T-1}) \quad \text{(stima di Viterbi)} \\
\hat{x}_{t|T} &= \operatorname{argmax}_{x_t=v_i} p(x_t = v_i, y_{0:T-1}) \quad \text{(algoritmo } \alpha - \beta\text{)} \\
\tilde{x}_t &= y_t \quad \text{(stringa ricevuta)}
\end{aligned}$$

Si considerino 3 scenari: $\epsilon = 0.05$ (rumore canale basso), $\epsilon = 0.25$ (rumore canale medio), $\epsilon = 0.45$ (rumore canale alto) e si considerino le prestazioni dei 4 stimatori definiti qui sopra in base ai seguenti indici di prestazione:

$$\begin{aligned}
e_z &= \frac{h_d(x_{0:T-1}, z_{0:T-1})}{2T} \quad \text{(bit error rate dopo la stima estimation)} \\
c_z &= \log p(x_{0:T-1} = z_{0:T-1}, y_{0:T-1}) \quad \text{(log della probabilita' della sequenza stimata)}
\end{aligned}$$

dove z_t corrisponde alla stima di uno dei 4 stimatori precedenti. In particolare il primo indice e' legato alla probabilita' di errore di bit dopo la stima, mentre il secondo indice va a calcolare la probabilita' a posteriori di una particolare sequenza. Si calcolino i precedenti indici mediati su 100 realizzazioni. La stima dei 4 stimatori va confrontata utilizzando la stessa realizzazione.