

## Lezione 11 — 21 Febbraio

Docente: Luca Schenato

Stesori: D. Donà; M. Munaro; B. M. Torri

## 11.1 Regolazione con controllo integrale

Viene aggiunto al sistema<sup>1</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

un nuovo stato:

$$\dot{x}_I = e = y - r = Cx - r$$

ottenendo ancora un sistema dinamico.

Riscrivendolo in forma compatta(usando un nuovo stato  $z$ ) si trova:

$$z = \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

e supposto che l'ingresso sia composto da un ingresso di controllo e un disturbo  $u = u_{in} + w$  si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + B_z u_z \\ y = C_z z \end{cases} \quad (11.1)$$

dove  $u_z = \begin{bmatrix} u_{in} \\ w \\ r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  e  $y_z = y$ 

Quindi esplicitando l'Equazione 11.1 si ricava:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix}}_{A_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ B & B & 0 \end{bmatrix}}_{B_z} \begin{bmatrix} u_{in} \\ w \\ r \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C \end{bmatrix}}_{C_z} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} \quad (11.3)$$

<sup>1</sup>dove per semplicità si è posto  $D=0$ .

In Fig. 11.1 viene rappresentato lo schema a blocchi del sistema con retroazione dello stato  $u_{in} = -K_z z$  (Fig 1a) e lo schema a blocchi del sistema finale<sup>2</sup> (Fig 1b).

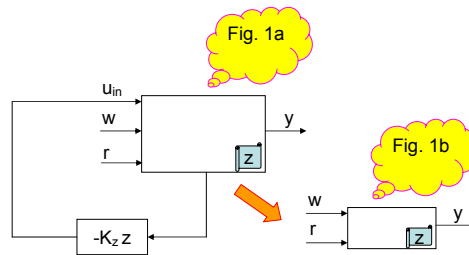


Figura 11.1. Sistema in catena chiusa

Se si sostituisce  $u_{in} = -K_z z$  in (11.2) si ottiene<sup>3</sup>:

$$\dot{z} = (A_z - B_{in}K_z) z = [B_{in} \mid B_r] \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix} \tag{11.4}$$

Quindi, ipotizzando che  $(A_z - B_{in}K_z)$  sia strettamente stabile, si osserva il comportamento del sistema a ingressi costanti  $r(t) = r_{DC}$  e  $w(t) = w_{DC}$  e si rileva che il sistema  $z \rightarrow z_{cost}$  a  $t \rightarrow \infty$ .

Di conseguenza  $\dot{z} = \begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{x} \end{bmatrix} \rightarrow 0$  che implica  $\dot{x}_I \rightarrow 0$ . Ricordando che  $\dot{x}_I = Cx - r = y - r$  si trova che  $y \rightarrow r$  ottenendo, quindi, un inseguimento perfetto a regime  $y \rightarrow r \rightarrow r_{DC}$ . Se anche  $A_z$  e  $B_{in}$  non sono note a priori la  $(A_z - B_{in}K_z)$  rimane stabile per piccole incertezze<sup>4</sup>.

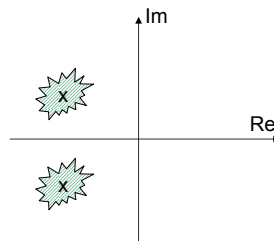


Figura 11.2. Incertezza poli del sistema in catena chiusa

<sup>2</sup>E' ancora un sistema dinamico in catena chiusa.

<sup>3</sup>Ricordando che  $B_z$  (11.2) è uguale a  $[B_{in}B_{in}B_r]$ .

<sup>4</sup>Per la proprietà di continuità degli autovalori di  $A$  rispetto agli elementi di  $A$ .

Affinché  $(A_z - B_{in}K_z)$  sia strettamente stabile si vuole che  $(A_z, B_{in})$  sia raggiungibile cioè che  $\text{rango}[sI - A_z | B_{in}] = n + 1$ .

Ora  $[sI - A_z | B_{in}]$  è:

$$\begin{bmatrix} s & -C & 0 \\ 0 & sI - A & B \end{bmatrix}$$

Se  $s \neq 0 \Rightarrow \text{rango}[sI - A_z | B_{in}] = n + 1$  perché  $\text{rango}[sI - A | B] = n$  (se  $(A, B)$  raggiungibile) e la prima riga è linearmente indipendente dalle altre.

Se  $s = 0$  la prima colonna è ininfluente al calcolo del rango e può essere rimossa. Inoltre una eventuale moltiplicazione di righe o colonne per  $-1$  così come lo scambio di righe, non cambia il rango, quindi la raggiungibilità per  $s = 0$  è equivalente a verificare:

$$\text{rango} \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}_{s=0} = n + 1$$

Il rango di questa matrice è  $n + 1$  se e solo se  $s = 0$  non è uno zero di trasferimento di  $(A, B, C)$ . Quindi sono 2 le ipotesi per garantire che  $(A_z - B_{in}K_z)$  sia strettamente stabile:

- $(A, B)$  raggiungibile
- $s = 0$  non è uno zero di trasferimento di  $(A, B, C)$ .

Per quanto riguarda la retroazione si sceglie:

$$u_{in} = -K_z z = - \begin{bmatrix} K_I & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ x \end{bmatrix} = -K_I x_I - K x$$

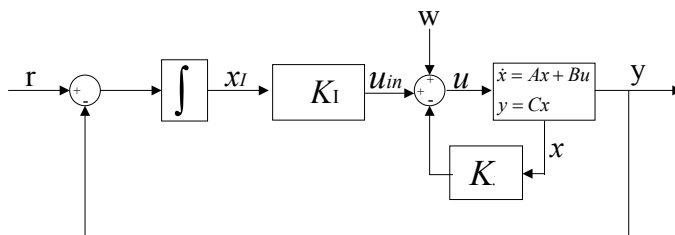


Figura 11.3. Controllo integrale

Si noti che il termine  $-K_I x_I$  può essere scritto come  $-K_I x_I = -K_I \int (y - r) = K_I \int (r - y)$  e rappresentato graficamente in Figura 11.3.

Questo modello risulta più lento rispetto al feed-forward perché l'errore integrale richiede un certo tempo prima che l'effetto sul controllo sia evidente.

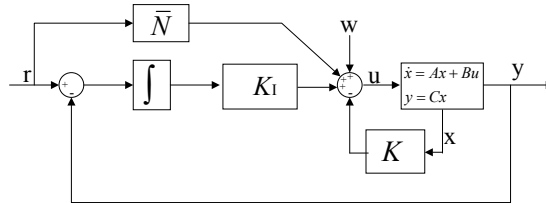


Figura 11.4. Controllo integrale modificato

Però posso prendere il riferimento e aggiungerlo nello schema come in Figura 11.4.

Con questa modifica il modello è veloce quanto il feed-forward e compensa eventuali disturbi  $\Rightarrow$  ha i vantaggi di entrambi.

Lo schema di Figura 11.4 è equivalente allo schema della Figura 11.5, progettando opportunamente la funzione di trasferimento  $P(s)$ . Uguagliando gli ingressi dei due modelli equivalenti, possiamo ricavare tale funzione  $P(s)$ :

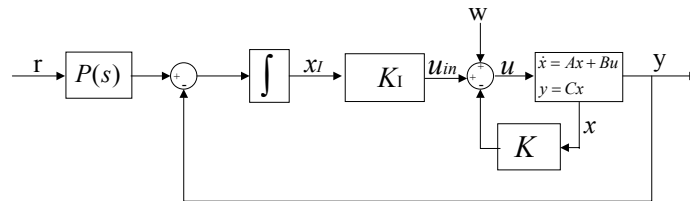


Figura 11.5. Principio del modello interno

$$\begin{aligned}
 U(s) &= W(s) - KX(s) + (R(s) - Y(s)) \left( \frac{K_I}{s} \right) + \bar{N}R(s) \\
 &= W(s) - KX(s) + [P(s)R(s) - Y(s)] \left( \frac{K_I}{s} \right) \\
 \Rightarrow (R(s) - Y(s)) \left( \frac{K_I}{s} \right) + \bar{N}R(s) &= \frac{K_I R(s) P(s)}{s} - \frac{K_I Y(s)}{s} \\
 \frac{R(s) K_I}{s} - \frac{Y(s) K_I}{s} + \bar{N}r &= \frac{K_I R(s) P(s)}{s} - \frac{K_I Y(s)}{s} \\
 \Rightarrow P(s) &= \frac{s}{K_I} \left( \frac{K_I}{s} + \bar{N} \right) = 1 + \frac{\bar{N}s}{K_I} = 1 + \tau s
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(s)$  corrisponde ad uno zero  $\Rightarrow$  la FDT avrà poli in catena chiusa come quella di prima più avrà uno zero reale negativo che tende a cancellare i poli  $\Rightarrow$  rende il sistema più veloce senza intaccare la prestazione a regime perché se  $s = 0 : P(s) = 1$ .

## 11.2 Linee guida per la progettazione con retroazione di stato

1. Scegliere se utilizzare feedforward, retroazione integrale o entrambi.
2. Scegliere posizione degli autovalori di  $A_{cc} = A - BK$  (con ipotesi che  $(A, B)$  raggiungibile)
3. Utilizzare la regione di prestazione di un sistema del 2° ordine.
4. Scegliere  $\lambda_{cc}(A_{cc})$ , autovalori in catena chiusa, non troppo negativi (per saturazione d'ingresso e incertezze che si hanno sul sistema).
5. Non spostare autovalori già sufficientemente negativi (può creare problemi).
6. Portare autovalori in catena chiusa vicino agli zeri negativi (aiuta a cancellare i poli) anche se vanno un po' fuori dalla regione di prestazione.
7. Cercare di mantenere  $\lambda_{cc}$  relativamente distanziati, perché, se sono vicini, si hanno modi del tipo  $t \exp(-t)$  che tendono a crescere per  $t$  piccoli.
8. Parametrizzare la posizione dei  $\lambda_{cc}$  (per esempio su una circonferenza di raggio  $\omega_n$  equidistanziandoli in quanto a posizione angolare).
9. Utilizzare simulazioni per scegliere la configurazione dei  $\lambda_{cc}$  ottimale.