

Lezione 12 — 22 Febbraio

Docente: Luca Schenato Stesori: Giulio “Zuita” Bottegal, Enrico “Bonobo” Lovisari, Riccardo “Kako” Fabbris

12.1 Principio del modello interno (Generalizzazione regolazione integrale)

Il principio del modello interno si basa sulla conoscenza delle caratteristiche del segnale di riferimento r e dei disturbi w . Il segnale di riferimento, il controllo e l'uscita sono necessariamente segnali scalari, ovvero $u, r, y \in \mathbb{R}$. Si assume ovviamente che la coppia (A, B) sia controllabile. Assumiamo per semplicità che $D = 0$, ovvero:
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y = Cx \end{cases}$$

con:

- $x \in \mathbb{R}^n$
- $u \in \mathbb{R}$
- $w \in \mathbb{R}^\ell$
- $r \in \mathbb{R}$
- $y \in \mathbb{R}^d$

Casi molto frequenti sono:

- $r(t)$ e $w(t)$ segnali costanti (ma non noti), ovvero che $\dot{r}(t) = 0, \dot{w}(t) = 0, \forall t \geq 0$. Si noti come questi segnali corrispondano ai modi di un sistema dinamico i cui poli sono dati dall'equazione

$$s = 0$$

- r e w sinusoidi di frequenza ω_0 , , ovvero che $\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) = 0, \ddot{w}(t) + \omega_0^2 w(t) = 0, \forall t \geq 0$. Si noti come questi segnali corrispondano ai modi di un sistema dinamico i cui poli sono dati dall'equazione

$$s^2 + \omega_0^2 = 0$$

- E' possibile generalizzare il problema a segnali periodici di cui si conoscano le frequenze. Il polinomio associato si trova facilmente moltiplicando i polinomi corrispondenti relativi ad ogni frequenza, ovvero assumendo che il segnale sia del tipo

$$r(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

dove $(a_0, a_1, a_2, \phi_1, \phi_2)$ non sono note, il corrispondente polinomio si ottiene come

$$s(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_2^2) = s^5 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)s^3 + \omega_1^2\omega_2^2s = 0$$

equivalente all'equazione differenziale:

$$r^{(5)}(t) + (\omega_1^2 + \omega_2^2)r^{(3)}(t) + \dots + \omega_1^2\omega_2^2r(t) = 0$$

Vogliamo ora analizzare il problema in maniera generale e progettare un controllore affinché $y(t) \rightarrow r(t)$ a regime. Assumiamo che i segnali di riferimento soddisfino le seguenti equazioni differenziali dove i parametri $\{\alpha_i\}_{i=0}^{m-1}$ sono noti:

$$r^{(m)} + \alpha_{m-1}r^{(m-1)} + \dots + \alpha_0r = 0 \quad (12.1)$$

$$w^{(m)} + \alpha_{m-1}w^{(m-1)} + \dots + \alpha_0w = 0 \quad (12.2)$$

cioè che abbiano gli stessi coefficienti.

Definiamo $e = y - r = Cx - r$ errore di inseguimento.

Dalla precedente si trova che $e^{(m)} = Cx^{(m)} - r^{(m)} \forall m$ e quindi

$$r^{(m)} = Cx^{(m)} - e^{(m)} \quad (12.3)$$

Dalle 12.1 e 12.3 si trova che:

$$Cx^{(m)} - e^{(m)} + \alpha_{m-1}(Cx^{(m-1)} - e^{(m-1)}) + \dots + \alpha_0(Cx - e) = 0$$

e quindi che:

$$e^{(m)} + \alpha_{m-1}e^{(m-1)} + \dots + \alpha_0 - C \underbrace{(x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0x)}_{\xi \in \mathbb{R}^n} = 0$$

Il nuovo stato risulta quindi essere:

$$\xi \triangleq x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0x$$

Da cui:

$$\begin{aligned}
 \dot{\xi} &= x^{(m+1)} + \alpha_{m-1}x^{(m)} + \dots + \alpha_0x^{(1)} \\
 &= (Ax^{(m)} + Bu^{(m)} + Gw^{(m)}) + \dots + \alpha_0(Ax + Bu + Gw) \\
 &= A(x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0x) + B \underbrace{(u^{(m)} + \alpha_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + \alpha_0u)}_{u_\xi \in \mathbb{R}^p} + \\
 &\quad + G(w^{(m)} + \alpha_{m-1}w^{(m-1)} + \dots + \alpha_0w) \\
 &= A\xi + Bu_\xi
 \end{aligned}$$

Dove, nell'ultima equazione, si è usata la 12.2 facendo così non comparire più il disturbo.

Il nuovo stato è quindi $z \triangleq \begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \xi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)}$

Da cui:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} e^{(1)} \\ \vdots \\ e^{(m)} \\ \xi \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{m-1} & C \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A \end{bmatrix}}^{A_z} \begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \xi \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix}}^{B_z} u_\xi$$

Quindi $\dot{z} = A_z z + B_z u_\xi$. Si noti come in questa nuova rappresentazione di stato non compaiono più nè l'ingresso $r(t)$, nè il disturbo $w(t)$.

Se (A_z, B_z) è raggiungibile, allora $\exists K_z \in \mathbb{R}^{(m+n) \times p} : (A_z - B_z K_z)$ gli autovalori siano in posizione arbitraria e quindi anche asintoticamente stabile. Nel caso sia strettamente stabile allora $z(t) \rightarrow 0$ per ogni condizione iniziale di r e w che soddisfino 12.1 e 12.2 e quindi $e(t) \rightarrow 0$, ovvero $y(t) \rightarrow r(t)$.

Applicando il criterio PBH per la raggiungibilità alle matrici (A_z, B_z) si trova:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc}
 s & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & s & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\
 \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & s + \alpha_{m-1} & -C & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & sI - A & B
 \end{array} \right]$$

Risulta che condizioni necessarie e sufficienti affinché (A_z, B_z) sia controllabile sono che:

- (A, B) sia raggiungibile
- gli zeri di $(s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \dots + \alpha_0)$ non siano zeri di trasferimento di (A, B, C) . Infatti se la coppia (A, B) è controllabile, le prime $m - 1$ righe e le ultime n righe della matrice PBH sono sempre linearmente indipendenti per ogni $s \in \mathbb{C}$. Rimane da verificare quando l' m -esima riga sia linearmente indipendente dalle altre. Se $s = \bar{z}$ è uno zero del polinomio $s^m + \dots + \alpha_0 = 0$, allora le prime m componenti della m -esima riga sono linearmente dipendenti dalle prime $m - 1$ righe. Se $s = \bar{z}$ è anche zero di trasferimento del sistema A, B, C , allora le ultime n componenti della m -riga sono linearmente indipendenti dalle ultime n righe della matrice PBH, e quindi il rango di quest'ultima sarebbe uguale a $m + n - 1$.

Vogliamo ora riscrivere il controllo in termini della variabile di stato originale $x(t)$ e del segnale di errore $e(t)$. La legge di controllo ottenuta nello spazio di stato modificato si può scrivere come:

$$u_\xi = - \underbrace{\begin{bmatrix} k_0 & \cdots & k_{m-1} & k_\xi \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m} \underbrace{\begin{bmatrix} e \\ \vdots \\ e^{(m-1)} \\ \xi \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

E dalla definizione di u_ξ

$$u^{(m)} + \alpha_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + \alpha_0u = -k_0e - \dots - k_{m-1}e^{(m-1)} - k_\xi(x^{(m)} + \alpha_{m-1}x^{(m-1)} + \dots + \alpha_0x)$$

Da cui

$$(u^{(m)} + k_\xi x^{(m)}) + \alpha_{m-1}(u^{(m-1)} + k_\xi x^{(m-1)}) + \dots + \alpha_0 \underbrace{(u + k_\xi x)}_{\tilde{u}} = -k_0e - \dots - k_{m-1}e^{(m-1)}$$

E quindi

$$\tilde{u}^{(m)} + \alpha_{m-1}\tilde{u}^{(m-1)} + \dots + \alpha_0\tilde{u} = -k_0e - \dots - k_{m-1}e^{(m-1)}$$

Trasformando alla Laplace

$$s^m\tilde{U}(s) + \alpha_{m-1}s^{m-1}\tilde{U}(s) + \dots + \alpha_0\tilde{U}(s) = -k_0E(s) - \dots - k_{m-1}s^{m-1}E(s)$$

Da cui

$$\begin{aligned} \tilde{U}(s) &= - \underbrace{\frac{k_{m-1}s^{m-1} + \dots + k_0}{s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \dots + \alpha_0}}_{P_e(s)} E(s) \\ &= -P_e(s)E(s) \end{aligned}$$

Lo schema completo del controllo tramite principio del modello interno è riportato in Fig.12.1

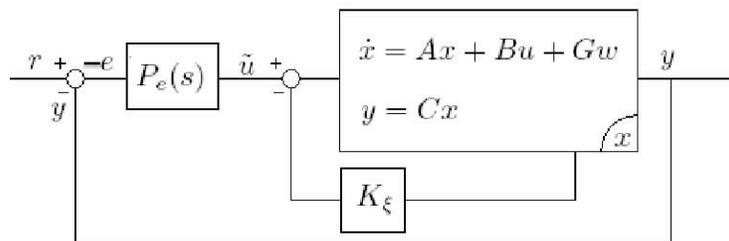


Figura 12.1. Schema del modello interno

Consideriamo ora la funzione di trasferimento dal segnale r di riferimento all'uscita y del sistema in catena chiusa:

$$Y(s) = P_{ry}(s)R(s)$$

Prendiamo come esempio di segnale da inseguire una semplice sinusoide con frequenza ω_0 , ovvero $\ddot{r}(t) + \omega_0^2 r(t) = 0$ allora si hanno segnali del tipo $r(t) = a \sin(\omega_0 t + \phi)$.

L'uscita a regime risulta quindi $y(t) = a |P_{ry}(j\omega_0)| \sin(t + \phi + \angle P_{ry}(j\omega_0))$. Se invece si hanno disturbi del tipo $w(t) = a \sin(t\omega_0 + \phi)$ e $r(t) = 0$ l'uscita a regime $y(t) = 0$. Quindi la funzione di trasferimento $Y(s) = P_{wy}(s)W(s)$ deve avere uno zero in ω_0 , cioè $P_{wy}(j\omega_0) = 0$.

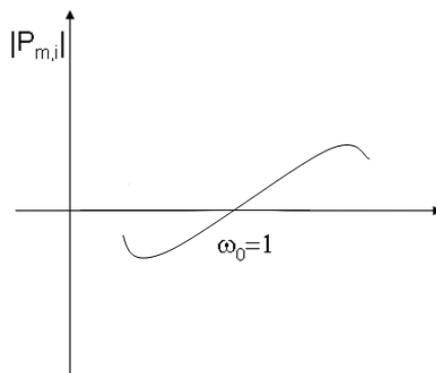


Figura 12.2. Modulo della funzione di trasferimento $P_{ry}(j\omega)$.

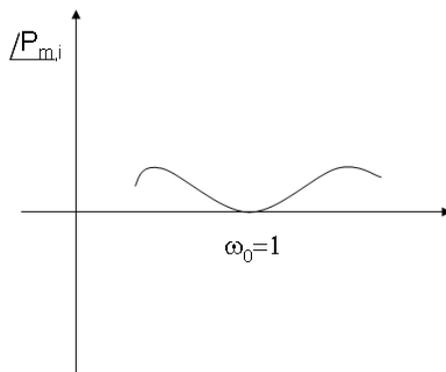


Figura 12.3. Fase della funzione di trasferimento $P_{ry}(j\omega)$.

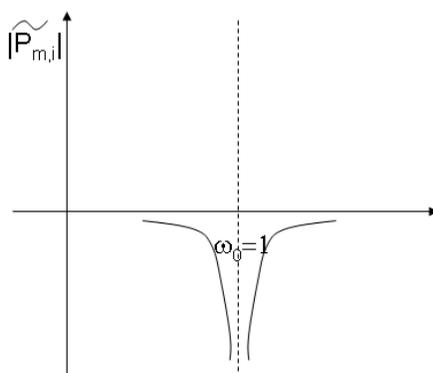


Figura 12.4. Modulo della funzione di trasferimento $P_{wy}(j\omega)$

12.2 Stimatori e regolatori

Non sempre è possibile (o conveniente) utilizzare la retroazione di stato $u = -Kx$, perchè:

1. non si dispone di tutto lo stato ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$);
2. anche se \mathbf{x} è disponibile, il segnale è molto rumoroso (ad es. $u = K(\mathbf{x} + \mathbf{v})$, con \mathbf{v} rumore additivo), quindi la retroazione risulta poco conveniente se il disturbo è elevato ($\|\mathbf{v}\| \sim \|\mathbf{x}\|$).

La soluzione che si utilizza in questi casi è quella di stimare lo stato \mathbf{x} e applicare la retroazione sulla stima, ottenendo

$$u = -K\hat{\mathbf{x}} \quad (12.4)$$

dove \hat{x} rappresenta lo stato stimato. Se si riesce ad ottenere $\hat{x} \simeq \mathbf{x}$ allora si hanno buone possibilità che il sistema di controllo abbia buone prestazioni.

La costruzione dello stimatore si basa sull'ipotesi che del sistema

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\ y = C\mathbf{x} \end{cases}$$

si conoscano con una certa accuratezza le matrici A , B , C ; in tal caso si procede facendo una copia del sistema reale sul controllore (ad esempio un computer adibito a questo scopo) secondo lo schema in fig. 12.5.

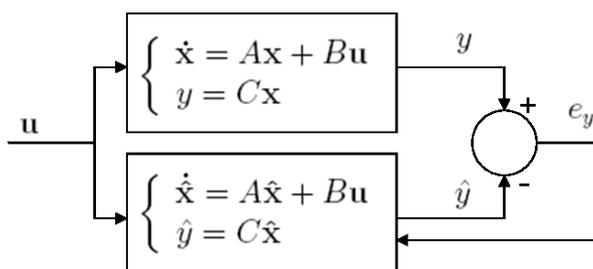


Figura 12.5. Stima dello stato.

Si definisce ora l'errore sulla stima di stato:

$$e_x \triangleq x - \hat{x} \quad (12.5)$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = Ax + Bu - A\hat{x} - Bu = A(x - \hat{x}) = Ae \\ &\Rightarrow \dot{e}_x = Ae_x. \end{aligned} \quad (12.6)$$

In particolare si ottiene che $e_x \rightarrow 0$ se e solo se A è “stabile” (ossia se i suoi autovalori hanno parte reale negativa); pertanto la costruzione degli stimatori di stato funziona solo per sistemi internamente stabili. In questo caso si ottiene che

$$e_x \sim e^{-\lambda t},$$

con λ autovalore di modulo maggiore. E' necessario osservare però che, limitandosi ad utilizzare una stima dello stato di tal genere, i modi che caratterizzano l'evoluzione dell'errore sono gli stessi che caratterizzano l'evoluzione libera del sistema, essendo in ambo i casi legati agli autovalori di A . Ma allora l'errore e_x non si può annullare con velocità maggiore di quella del sistema stesso.

Si supponga invece ora di considerare anche l'errore sull'uscita:

$$e_y = y - \hat{y}, \quad (12.7)$$

e si supponga di modificare la dinamica della stima dello stato ponendo:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}). \quad (12.8)$$

Costruita in tal modo la stima, la dinamica dell'errore sullo stato diviene:

$$\dot{e}_x = \dot{x} - \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - Ax - Bu - L(y - \hat{y}) \quad (12.9)$$

$$= A(x - \hat{x}) - LC(x - \hat{x}) = (A - LC)e_x = A_s e_x \quad (12.10)$$

Come suggerisce la teoria dell'Analisi dei Sistemi, se il sistema (A, C) è osservabile (e per dualità è sufficiente controllare che (A^T, C^T) sia raggiungibile), allora gli autovalori di A_s sono allocabili a piacere in funzione della matrice L opportuna scelta.

Scelta dunque L tale per cui A_s sia strettamente stabile, si ha la convergenza della stima dello stato \hat{x} allo stato x , e questo avviene:

- $\forall x(0), \hat{x}(0)$;
- $\forall u(t)$: il principio dello stimatore è infatti una proprietà legata esclusivamente all'evoluzione libera, e per questo si parla di principio di separazione della stima dal controllo.

E' necessario però osservare che se il modello dello stimatore non è perfetto, non si ha perfetta cancellazione $Bu - Bu$ in 12.9, e dunque, pur limitato, si avvertirà in questo caso l'effetto dell'ingresso.