LabCont2: Laboratorio di Controlli 2 **a.a. 2009-2010**

Lezione 12 — 31 Marzo 2010

Docente: Luca Schenato *Stesore: Cerruti Federico, Masiero Chiara, Merlo Pierangelo*

12.1 Controllo LQG: lineare quadratico gaussiano

Le tecniche di controllo LQG differiscono da quelle classiche LQ per l'introduzione di rumori di processo ed osservazione, secondo lo schema seguente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + dw \\ y = Cx + dv \end{cases}$$

Lo stato in generale non è accessibile, dw rappresenta il rumore di modello e dv quello di osservazione.
Restringeremo la nostra attenzione su modelli a tempo discreto, per i quali la trattazione è semplificata. Analizzeremo il caso:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

Assumeremo per ipotesi che $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ e $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ siano bianchi e scorrelati. Per lo stato iniziale, vale che $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, P_0)$.

L'indice di costo quadratico da ottimizzare è definito come segue:

$$J_T(x_0, u) = \mathbb{E}_{v,w}\left[\sum_{k=0}^{T-1} {x_k}^T W x_k + {u_k}^T R u_k + x_T^T W_T x_T\right]$$

L'obiettivo è calcolare:

$$\min_{u_0,\ldots,u_{T-1}} J_T(x_0, u)$$

adottando ingressi causali, ovvero tali che $u_k = f_k(y_0, \ldots, y_k, u_0, \ldots, u_{k-1})$.
Nel caso lineare quadratico gaussiano con costo quadratico, il minimo si riesce ad esprimere in forma chiusa. Si dimostrerà, in particolare, che il minimizzatore del funzionale di costo è dato da:

$$u_k^* = K_k \hat{x}_{k|k}$$

con $\hat{x}_{k|k} = E\left[x_k | y_0, \ldots, y_k, u_0, \ldots, u_{k-1}\right]$, mentre il guadagno K_k si ottiene risolvendo il problema di controllo LQ ottenuto supponendo nulli i rumori e noto lo stato. Vale, quindi, il fondamentale *Principio di separazione*, per cui si ha che:

$$\min_{u_0,\ldots,u_{T-1}} J_T(x_0, u) = g(P_{k|k}, S_k)$$

con $P_{k|k}$ fornita dal filtro di Kalman ed S_k soluzione dell'equazione iterativa di Riccati del problema di controllo LQ associato.

In conclusione, il regolatore ottimo ha la forma illustrata in figura (12.1).

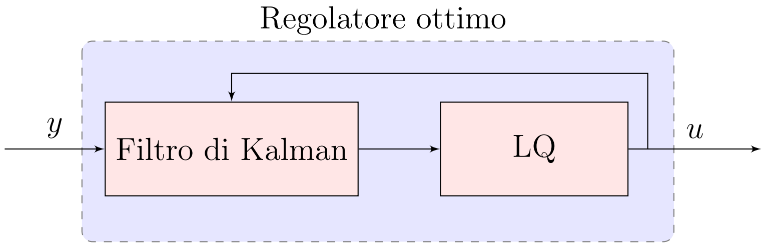

Figura 12.1. Schema a blocchi che rappresenta il ruolo dell'integratore nella definizione della funzione di costo da ottimizzare