LabCont2: Laboratorio di Controlli 2 **a.a. 2009-2010**

Lezione 7 — 17 Marzo

Docente: Luca Schenato *Stesore: Baseggio Mauro, Bristot Francesca, Pozzi Mauro*

7.1 Ripasso lezione precedente

- Equazione di Riccati:

$$-\dot{P} = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

  con condizione finale $P(T,T) = Q_T$

- $V_0^*(x_0) = x_0^T P(0,T)x_0$

- $\lim_{(T-t)\to+\infty} P(t,T) = \lim_{T\to+\infty} P(0,T) = \bar{P} \geq 0$

- 1. Se (A,B) è stabilizzabile $\Rightarrow \bar{P} \leq M$, cioè $\bar{P}$ limitata
  2. Se (A,$Q^{1/2}$) è rivelabile $\Rightarrow$ può esistere $\bar{P}$
     ma con l'ingresso ottimo $u^*(t) = -R^{-1}B^T\bar{P}x(t)$ il sistema in catena chiusa può essere instabile

  Se valgono le condizioni 1 e 2, H può essere scritta come:

$$H = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

  con Λ_1 sottomatrice avente autovalori strettamente stabile e Λ_2 autovalori strettamenti instabili (e opposti a quelli di Λ_1).
  Vale inoltre che:

$$P(t,T) = g(e^{\Lambda_1(t-T)}, e^{\Lambda_2(t-T)}, Q_T, W)$$

  con

$$\bar{P} = W_{21}W_{11}^T, \quad \forall Q_T$$

7.2 Stabilità della matrice F in catena chiusa

Proposizione 7.1. *Se la coppia (A,B) è stabilizzabile e se la coppia (A,$Q^{1/2}$) è rivelabile la matrice F del sistema in catena chiusa, ottenuta applicando la legge di controllo ottima $u^* = -R^{-1}B^T\bar{P}x$, è strettamente stabile.*

***Dimostrazione*:** Notiamo preliminarmente che l'ipotesi di rivelabilità e stabilizzabilità garantiscono l'esistenza e l'unicità della matrice $\bar{P}$. Supponiamo per assurdo che esista λ autovalore di $F = A - BR^{-1}B^T\bar{P}$, matrice relative al sistema in catena chiusa, a parte reale non negativa, cioè $\mathrm{Re}[\lambda] \geq 0$. A partire dall'equazione di Riccati soddisfatta a regime si verifica facilmente che:

$$F^T\bar{P} + \bar{P}F = -Q - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}$$

Premoltiplicando per v^* e postmoltiplicando per v (con v autovettore di F relativo a $\bar{\lambda}$) si ottiene:

$$v^*F^T\bar{P}v + v^*\bar{P}Fv = -v^*Qv - v^*\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}v$$

Sfruttando il fatto che v è autovettore di F relativo $\bar{\lambda}$ diventa:

$$\lambda^*v^*\bar{P}v + v^*\bar{P}\lambda v = -v^*Qv - v^*\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}v$$

che raccogliendo opportunamente i termini risulta:

$$(\lambda^* + \lambda)v^*\bar{P}v = -v^*Qv - v^*\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}v$$

Ma la quantità a destra dell'uguale è senz'altro ≤ 0 ($Q \geq 0$, $R > 0$) mentre quella a sinistra dell'uguale è ≥ 0 ($\bar{P} \geq 0$) quindi affinchè valga l'uguaglianza è necessario che entrambi i termini siano nulli e quindi in particolare:

$$\begin{cases} Qv = 0 \\ B^T\bar{P}v = 0 \end{cases}$$

Ma quindi:

$$Fv = (A - BR^{-1}B^T\bar{P})v = Av - BR^{-1}B^T\bar{P}v = Av = \lambda v$$

E a questo punto si conclude immediatamente con l'assurdo in quanto le due condizioni a cui siamo giunti:

$$\begin{cases} Qv = 0 \\ Av = \lambda v \end{cases}$$

significano che la coppia (A,$Q^{1/2}$) non è rivelabile in quanto esiste un autovalore instabile per A che appartiene al kernel di Q, contro l'ipotesi di partenza. □

7.3 Autovalori della matrice F

Proposizione 7.2. *Gli autovalori della matrice F, ottenuta applicando la legge di controllo ottima $u^* = -R^{-1}B^T\bar{P}x$, sono quelli stabili della matrice H.*

***Dimostrazione*:** Scegliamo T matrice di cambiamento di base del tipo:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{P} & I \end{bmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{P} & I \end{bmatrix}$$

Applicando il cambiamento di base alla matrice H (gli autovalori restano gli stessi) si ottiene:

$$THT^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BR^{-1}B^T\bar{P}) & -BR^{-1}B^T \\ -\bar{P}A - Q - A^T\bar{P} + \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} & -A^T + \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} F & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -F^T \end{bmatrix}$$

in quanto in posizione (1,1) e (2,2) vi è proprio rispettivamente F e $-F^T$, mentre in posizione (2,1) vi è l'equazione di Riccati che è soddisfatta a regime da $\bar{P}$ (con $\dot{\bar{P}} = 0$).
La matrice è triangolare superiore pertanto i suoi autovalori sono quelli dei blocchi diagonali (F,$-F^T$) quindi non solo si è dimostrato che gli autovalori di F sono quelli stabili di H, ma ancora una volta si rimarca il fatto che gli autovalori instabili di H sono esattamente l'opposto di quelli stabili. □

7.4 Unicità della soluzione a regime dell'E.A.R

Proposizione 7.3. *Esiste un'unica matrice $\bar{P} \geq 0$ che soddisfa l'equazione di Riccati a regime*

***Dimostrazione*:** Supponiamo per assurdo che esistano due matrici $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ che soddisfano l'equazione di Riccati, quindi:

$$F_1 = (A - BR^{-1}B^T\bar{P}_1) \qquad \text{strettamente stabile}$$

$$F_2 = (A - BR^{-1}B^T\bar{P}_2) \qquad \text{strettamente stabile}$$

Si dimostra facilmente che vale l'uguaglianza:

$$(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)F_1 + F_2^T(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) = 0 \tag{7.1}$$

Infatti sostituendo a F_1, F_2 rispettivamente $(A - BR^{-1}B^T\bar{P}_1)$ e $(A - BR^{-1}B^T\bar{P}_2)$ e svolgendo i conti si ottiene:

$$\bar{P}_1A - \bar{P}_1BR^{-1}B^T\bar{P}_1 - \bar{P}_2A + \bar{P}_2BR^{-1}B^T\bar{P}_1 + A^T\bar{P}_1 - A^T\bar{P}_2 -$$

$$-\bar{P}_2BR^{-1}B^T\bar{P}_1 + \bar{P}_2BR^{-1}B^T\bar{P}_2 = 0$$

dove il termine $(-\bar{P}_2BR^{-1}B^T\bar{P}_1)$ si semplifica con $(+\bar{P}_2BR^{-1}B^T\bar{P}_1)$.
Sommando e sottraendo la matrice Q risulta:

$$(A^T\bar{P}_1 + \bar{P}_1A + Q - \bar{P}_1BR^{-1}B^T\bar{P}_1) - (A^T\bar{P}_2 + \bar{P}_2A + Q - \bar{P}_2BR^{-1}B^T\bar{P}_2) = 0$$

ed entrambi gli addendi sono nulli in quanto per ipotesi $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ soddisfano l'equazione di Riccati.
L'espressione 7.1 ha quindi la forma di un funzionale lineare del tipo:

$$\mathscr{L}(X) = XF_1 + F_2^TX = 0 \qquad \text{con } X \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

che può essere riscritto anche come:

$$Mx = 0 \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}^{n^2} \tag{7.2}$$

con gli autovalori di M che sono quindi gli stessi del funzionale $\mathscr{L}$.
Posto $X = v_2v_1^*$ (con v_1^*, v_2 rispettivamente autovettore sinistro di F_1 e destro di F_2^T) si osserva immediatamente che X è autovettore per $\mathscr{L}$ relativo ad autovalore $(\lambda_1 + \lambda_2)$:

$$\mathscr{L}(v_2v_1^*) = \lambda_1v_2v_1^* + \lambda_2v_2v_1^* = (\lambda_1 + \lambda_2)v_2v_1^*$$

ma $\Re(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$ (F_1 e F_2 per ipotesi sono strettamente stabili) quindi la matrice M non ha nessun autovalore in 0 (equivalentemente è a rango pieno e invertibile) e l'unica soluzione dell'equazione 7.2 è $x = 0$.
Questo si traduce nel funzionale $\mathcal{L}$ nella condizione equivalente:

$$\mathscr{L}(X) = XF_1 + F_2^TX = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad X = 0$$

che è proprio la tesi $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ $\square$

7.5 Luogo delle radici

Iniziamo ad analizzare dove si posizionano i poli in catena chiusa per un sistema SISO, single input single output:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = -\bar{K}x \end{cases}$$

in cui si ha $\bar{K} = R^{-1}B^T\bar{P}$.

Il sistema può essere così schematizzato:

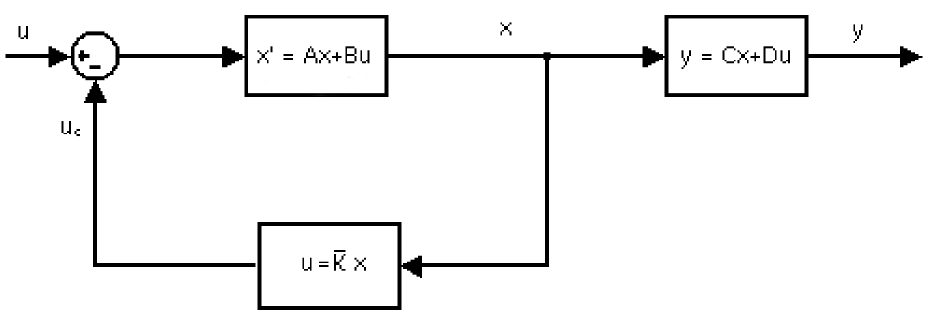

Figura 7.1. Schema a retroazione

Se consideriamo come ingresso u e come uscita u_c possiamo andare a calcolare la funzione di trasferimento che li lega che indicheremo con $U_c(s) = P_u(s)U(s)$:

$$P_u(s) = K(sI - A)^{-1}B = \frac{n_u(s)}{d_u(s)}$$

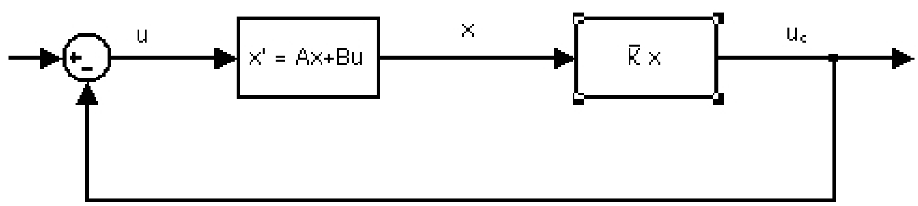

Figura 7.2. Schema f.d.t. tra u e u_c

E' possibile quindi definire la seguente funzione di costo:

$$J(u) = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u \; dt = \int_0^\infty y^2(t) + u^2(t) \; dt = \int_0^\infty x^T C^T C x + r \cdot u^2 \; dt \qquad (7.3)$$

in cui per il sistema SISO in questione la matrice R è in realtà uno scalare (perciò lo si indicherà con r) e rappresenta il nostro grado di libertà per far variare l'indice:

$$\Rightarrow \qquad r > 0 \qquad \textit{parametro di progettazione}$$

La matrice H in questo caso diventa la seguente:

$$H = \begin{bmatrix} A & -1/rBB^T \\ -C^TC & -A^T \end{bmatrix}$$

e, come sottolineato più volte, i poli in catena chiusa sono gli autovalori stabili di H.

Nella prossima lezione si indagherà come varia la posizione di tali poli al variare del parametro di progettazione r.