

Lezione 14 — Aprile 20

Docente: Luca Schenato

Stesore: Andreaus, Cavraro, Vezzano

14.1 Controllo Ottimo LQG

Ripassiamo quanto finora visto sul controllo LQG. Si consideri il sistema lineare dinamico:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\quad (14.1)$$

dove le variabili aleatorie w_k e v_k , che rappresentano rispettivamente gli errori di modello e di uscita, sono Gaussiane a media nulla e scorrelate:

$$w_k \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad Q \geq 0 \quad (14.2)$$

$$v_k \sim \mathcal{N}(0, R), \quad R \geq 0 \quad (14.3)$$

Si vuole ricercare la sequenza di ingressi $\{u_0, \dots, u_{T-1}\}$ che minimizza l'indice di costo quadratico:

$$J_T = \mathbb{E} \left[\sum_{k=0}^{T-1} (x_k^T W x_k + u_k^T U u_k) + x_T^T W x_T \right], \quad W, W_T, U \geq 0 \quad (14.4)$$

ovvero si calcola

$$u_k = f_k(u_0, \dots, u_{k-1}, y_0, \dots, y_k), \quad k = 0, \dots, T \quad (14.5)$$

tale da risolvere il problema di minimo:

$$J_T^*(x_0) = \min_{u_0, \dots, u_{T-1}} J_T(u, x_0) \quad (14.6)$$

È da notare che nella definizione della funzione costo (14.4) si è fatto uso dell'operatore di aspettazione.

Per ricavare il minimo abbiamo visto che conviene definire la funzione V_k^* di costo minimo da k a T , e risolvere ricorsivamente per $k = T, T-1, \dots, 0$ il problema:

$$V_k^*(x_k) = \min_{u_k} E[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + V_{k+1}^*(x_{k+1}) | y_{0:k}, u_{0:k-1}]$$

Infatti vale la seguente eguaglianza:

$$J_T^*(x_0) = \min_u J_T(u, x_0) = V_0^*(x_0)$$

Definendo S_k come la soluzione dell'equazione alle differenze di Riccati:

$$\begin{aligned} S_k &= A^T S_{k+1} A + W - A^T S_{k+1} B (B^T S_{k+1} B + U)^{-1} B^T S_{k+1} A \\ S_T &= W_T \quad (\text{condizione finale}) \end{aligned} \quad (14.7)$$

si ottiene:

$$V_k^*(x_k) = E[x_k^T S_k x_k | y_{0:k}, u_{0:k-1}] + c_k$$

con S_k matrice semidefinita positiva e c_k scalare non negativo, $c_k \in \mathbb{R}$.

Precisamente si ha :

$$\begin{aligned} c_k &= c_{k+1} + \text{tr}(P_{k|k} V_k) + \text{tr}(S_{k+1} Q) \\ &= c_{k+1} + \text{tr}(P_{k|k} (A^T S_{k+1} A + W - S_k)) + \text{tr}(S_{k+1} Q) \end{aligned} \quad (14.8)$$

Dalle considerazioni precedenti riusciamo a calcolare

$$\begin{aligned} J_T^*(x_0) &= E[x_0^T S_0 X_0] + \sum_{h=1}^{T-1} \text{tr}(Q S_{k+1} + P_{k|k} V_k) \\ &= E[x_0^T S_0 X_0] + \sum_{h=1}^{T-1} \text{tr}(Q S_{k+1} + P_{k|k} (A^T S_{k+1} - S_k + W)) \end{aligned} \quad (14.9)$$

L'equazione del controllore risulta essere una funzione lineare della stima di stato \hat{x}_k :

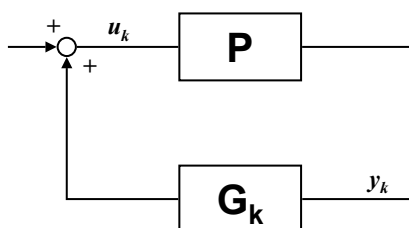
$$\begin{aligned} u_k &= -(U + B^T S_{k+1} B)^{-1} B S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} \\ &= L_k \hat{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (14.10)$$

Con $\hat{x}_{k|k} = E[x_k | y_{0:k}, u_{0:k-1}]$ stima del filtro di Kalman

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= P_{k|k-1} - P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R)^{-1} C P_{k|k-1} A^T \\ P_{k+1|k} &= A P_{k|k-1} A^T + Q - \underbrace{A P_{k|k-1} C^T (C P_{k|k-1} C^T + R)^{-1} C P_{k|k-1} A^T}_{K_{k+1}} \\ \hat{x}_{k+1|k+1} &= A \hat{x}_{k|k} + B u_k + \underbrace{K_{k+1} (y_{k+1} - C A \hat{x}_{k|k})}_{\hat{x}_{k+1|k}} \end{aligned} \quad (14.11)$$

Si vede che u_k^* è lineare nelle misure:

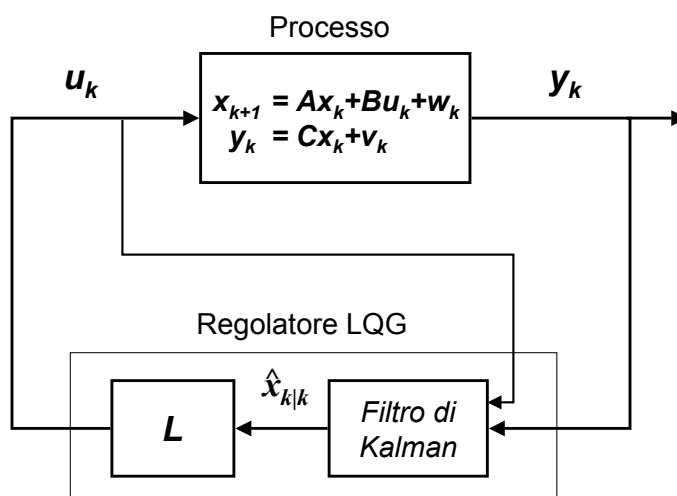
$$u_k^* = f_k(u_0, \dots, u_{k-1}, y_0, \dots, y_k) = \sum_{h=0}^k G_h y_h, \quad k = 0, \dots, T \quad (14.12)$$



Osserviamo che esiste una similarità, detta dualità, tra le due equazioni alle differenze di Riccati:

- la prima procede all'indietro a partire dalla condizione finale $S_T = W_T$ e risolve il problema del regolatore lineare quadratico (LQR)
- la seconda procede in avanti (varia maggiormente all'inizio in quanto risente dell'effetto di P_0) e risolve il problema dello stimatore lineare quadratico (LQE).

In definitiva per il controllo ottimo LQG vale il principio di separazione, nel senso che si può scindere il problema in due sotto problemi, rispettivamente la risoluzione di un classico controllo LQ ($u_k^* = L_k^* \hat{x}_{k|k}$) e di un filtro di Kalman. Naturalmente le matrici L_k e K_k sono tempo-varianti.



Ci poniamo ora il problema di calcolare l'ingresso ottimo nel caso di orizzonte temporale infinito, vale a dire considerando $T \rightarrow \infty$.

Devono essere soddisfatte alcune condizioni:

Controllo LQ:

- Se (A, B) è stabilizzabile \Rightarrow La successione di matrici S_k converge ad una matrice S_∞
- se $(A, W^{1/2})$ è rivelabile \Rightarrow La matrice S_∞ così calcolata è unica.

Filtro di Kalman:

- Se (A, C) rivelabile $\Rightarrow P_{k+1|k}$ ($P_{k|k}$) limitato superiormente, $P_{k+1|k} \rightarrow P_\infty < \infty$;
- Se $(A, Q^{1/2})$ è stabilizzabile $\Rightarrow \exists! P_\infty \geq 0$: P_∞ risolve l'equazione di Riccati.

Sotto tali ipotesi di controllabilità e di rivelabilità delle matrici del sistema, valgono le seguenti proprietà di convergenza:

$$S_k \rightarrow S_\infty \Rightarrow L_k \rightarrow L_\infty = (B^T S_\infty B + U)^{-1} B^T S_\infty A \quad (14.13)$$

$$P_{k+1|k} \rightarrow P_\infty \Rightarrow K_k \rightarrow K_\infty = P_\infty C (C^T P_\infty C + R)^{-1} \quad (14.14)$$

$$\begin{aligned} J_\infty^* &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} J_T^* = \lim_{k \rightarrow \infty} E[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k] \\ &= \text{tr}((AS_\infty A^T + W - S_\infty)(AP_\infty A^T + Q)) \end{aligned} \quad (14.15)$$

dove nella penultima uguaglianza si è utilizzato il teorema ergodico e $P_{k|k} = AP_{k|k-1}A + Q \rightarrow AP_\infty A + Q$.

In tal caso a regime otteniamo il sistema lineare tempo-invariante:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1} + K_\infty(y_k - C(A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1})) \\ u_k &= L_\infty \hat{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (14.16)$$

rendendo esplicita la u_k si ha:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= (A + BL_\infty)\hat{x}_{k-1|k-1} + K_\infty(y_k - C(A + BL_\infty)\hat{x}_{k-1|k-1}) \\ u_k &= L_\infty \hat{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (14.17)$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k} &= \underbrace{(I - K_\infty C)(A + BL_\infty)}_F \hat{x}_{k-1|k-1} + K_\infty y_k \\ u_k &= L_\infty \hat{x}_{k|k} \end{aligned} \quad (14.18)$$

Riscriviamo ora le equazioni utilizzando la forma usuale (aggiornamento dello stato + mappa di uscita).

Partendo da:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1|k} &= A\hat{x}_{k|k} + Bu_k \\ u_k &= L_\infty \hat{x}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (14.19)$$

ricordando che:

$$\hat{x}_{k|k} = x_{k|k-1} + K_\infty(y_k - Cx_{k|k-1}) = (I - K_\infty C)\hat{x}_{k|k-1} + K_\infty y_k$$

e rendendo esplicito u_k , si giunge alla seguente rappresentazione:

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= (A - \bar{K}_\infty C + BL_\infty)\hat{x}_{k|k-1} + \bar{K}_\infty y_k \\ u_k &= L_\infty \hat{x}_{k|k-1}\end{aligned}\tag{14.20}$$

dove $\bar{K}_\infty = AK_\infty$. Definendo inoltre: $z_k = \hat{x}_{k|k-1}$ si ha:

$$\begin{aligned}z_{k+1} &= Fz_k + Gy_k \\ u_k &= Hz_k\end{aligned}\tag{14.21}$$

con $F = (A - \bar{K}_\infty C + BL_\infty)$, $G = \bar{K}_\infty$ e $H = L_\infty$

La funzione di trasferimento del controllore + stimatore è data da:

$$C(s) = L_\infty (Is - A + \bar{K}_\infty C - BL_\infty)^{-1} \bar{K}_\infty$$

Il principio di separazione ci permette di progettare separatamente il filtro e il controllore ottimo. Il regolatore LQG che si ottiene alla fine è esso stesso un sistema lineare dinamico come il processo che deve controllare, ma non è necessariamente stabile. Inoltre, poichè possiede la medesima dimensione di P, permette sempre di stabilizzare (cosa che invece non può garantire un PID).

Passiamo infine alla scelta dei pesi R,Q. Riconsideriamo il modello:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k &= Cx_k + v_k\end{aligned}\tag{14.22}$$

con $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ e $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$, $R, Q \geq 0$, che rappresentano rispettivamente gli errori di modello e di uscita. v_k è possibile calcolarlo andando a guardare l'uscita, mentre per w_k e quindi per Q , si procede seguendo questi passi:

- Si progetta il controllore LQ e si analizza la banda
- Si prende $Q = qBB^T$ con q scalare, in modo da garantire che la coppia (A, Q) sia stabilizzabile. Solitamente si sceglie Q affinché la Banda del filtro sia 2-3 volte la Banda del Controllore LQ. L'obiettivo è infatti quello di avere una buona velocità di stima (più rapida del controllo), ma non eccessivamente elevata in modo da evitare di amplificare il rumore.

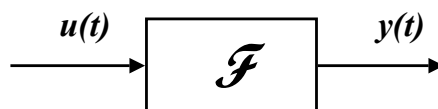
14.2 Identificazione

L'identificazione dei sistemi è una scienza che si prefigge l'obiettivo di stimare modelli di sistemi a partire da dati sperimentali. Numerosi sistemi infatti sono difficili da modellare tramite le leggi della fisica o troppo complicati: per questo motivo l'identificazione cerca di trovare un modello che si adegui alle misure effettuate. In genere si sceglie un segnale di input al quale sottoporre il sistema e si misurano quindi le sequenze in uscita; avremo dunque le seguenti sequenze:

$$\begin{aligned} u(t) &= u(1), u(2), \dots, u(N) \rightarrow \text{INGRESSI} \\ y(t) &= y(1), y(2), \dots, y(N) \rightarrow \text{USCITE} \end{aligned}$$

dove N rappresenta il numero di misure. Va aggiunto inoltre che bisogna tenere sempre conto che le misure non sono perfette ma inevitabilmente affette da rumore.

Esistono 3 differenti approcci, elencati brevemente qui di seguito:



1) Predizione: $\{u(t), y(t)\}_{t=0}^T \longrightarrow \hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2)$

2) Modellizzazione:

utilizzata per identificare dei parametri che non possono essere calcolati direttamente

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -kx + u \\ y &= x \end{aligned} \quad , \quad \{u(t), y(t)\}_{t=0}^T \longrightarrow \hat{k} \quad (14.23)$$

3) Identificazione per Controllo:

Identifico F in modo da garantire che il sistema retroazionato funzioni correttamente.

