LabCont2: Laboratorio di Controlli 2	**a.a. 2009-2010**
Lezione 13 — Aprile 13	
Docente: Luca Schenato	*Stesore: Guido Cavraro, Tommaso Andreaus, Andrea Vezzaro*

13.1 Controllo LQG

Nella trattazione seguente considereremo sistemi dinamici discreti del tipo

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \\ y_k = Cx_k + v_k \end{cases}$$

dove $w_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$ e $v_k \sim \mathcal{N}(0, R)$ sono bianchi e fra loro scorrelati con $Q, R \geq 0$, mentre lo stato iniziale è $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x_0}, P_0)$.

L'indice di costo da ottimizzare è il seguente:

$$J_T(x_0, u) = E_{v,w}\left[\left(\sum_{k=0}^{T-1} {x_k}^T W x_k + {u_k}^T U u_k\right) + x_T^T W_T x_T\right]$$

con $U, W, W_T \geq 0$. Il nostro scopo è quello di trovare il

$$\min_{u_0,\ldots,u_{T-1}} J_T(x_0, u)$$

imponendo il solo vincolo di causalità dell'ingresso. L'ingresso ottimo sarà dunque della forma

$$u_k^* = f_k(y_0, \ldots, y_k, u_0, \ldots, u_{k-1})$$

.

Richiamiamo brevemente alcune nozioni sul filtro di Kalman per sistemi con ingressi. Siano

- $\hat{x}_{k|k-1} = \mathbb{E}[x_k|y_{0:k-1}, u_{0:k-1}]$ la predizione dello stato x_k, basata sulla conoscenza delle misure e degli ingressi fino all'istante $k-1$;
- $\hat{x}_{k|k} = \mathbb{E}[x_k|y_{0:k}, u_{0:k-1}]$ la stima dello stato x_k, basata sulla conoscenza delle misure fino all'istante corrente k, e degli ingressi fino all'istante $k-1$;
- $e_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1}$ l'errore di predizione;
- $e_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}$ l'errore di stima;
- $P_{k|k-1} = \mathrm{Var}(e_{k|k-1})$ la varianza dell'errore di predizione;
- $P_{k|k} = \mathrm{Var}(e_{k|k})$ la varianza dell'errore di stima;

Le formule del filtro di Kalman per sistemi con ingressi differiscono leggermente dalle altre, infatti:

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= \mathbb{E}[Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}|y_{0:k-1}, u_{0:k-1}] \\
&= A\ \mathbb{E}[x_{k-1}|y_{0:k-1}, u_{0:k-1}] + Bu_{k-1} \\
&= A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{k|k-1} &= Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} - A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1} \\
&= A(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + w_{k-1} + B(u_{k-1} - u_{k-1}) \\
&= Ae_{k-1|k-1} + w_{k-1}
\end{aligned}
$$

$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + P_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}CP_{k|k-1}(y_k - C\hat{x}_{k|k-1})$$

$$e_{k|k} = x_k - \hat{x}_{k|k}$$

$$P_{k|k} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1}C^T(CP_{k|k-1}C^T + R)^{-1}CP_{k|k-1}$$

Queste valgono solamente sia se sono perfettamente noti gli ingressi u_k del sistema, sia se il sistema è stato modellato perfettamente. Nel caso in cui queste due condizioni non siano verificate, il risultato dell'algoritmo può essere una stima dello stato del sistema profondamente diversa da quella ottenuta usando valori veri. Siano infatti

- A^p e u_k^p rispettivamente il modello esatto del sistema e l'ingresso vero, che realmente entra nel sistema all'istante k
- A^c e u_k^c rispettivamente un modello approssimato del sistema vero e una stima dell'ingresso all'istante k.

Si avrebbe allora che

$$
\begin{aligned}
\hat{x}_{k|k-1} &= A^c x_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}^c \neq A^p\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}^p \\
e_{k|k-1} &= A^p x_{k-1} + Bu_{k-1}^p + w_{k-1} - A^c\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}^c
\end{aligned}
$$

Prima di enunciare un risultato molto importante per la teoria del controllo LQG, richiamiamo alcune proprietà che serviranno in seguito.

1. $\hat{x}_{k|k} \perp e_{k|k}$, cioè $\mathbb{E}[e_{k|k}\hat{x}_{k|k}^T|y_{0:k}, u_{0:k-1}] = 0$.

2. $\mathbb{E}[e_{k|k}^T V e_{k|k}|y_{0:k}, u_{0:k-1}] = \mathrm{tr}(\mathbb{E}[V e_{k|k}e_{k|k}^T|y_{0:k}, u_{0:k-1}]) = \mathrm{tr}(V\mathbb{E}[e_{k|k}e_{k|k}^T|y_{0:k}, u_{0:k-1}]) = \mathrm{tr}(VP_{k|k})$

3. $\mathbb{E}[x_k^T V x_k|y_{0:k}, u_{0:k-1}] = \mathbb{E}[(x_k - \hat{x}_{k|k} + \hat{x}_{k|k})^T V(x_k - \hat{x}_{k|k} + \hat{x}_{k|k})|y_{0:k}, u_{0:k-1}] =$
$= \hat{x}_{k|k}^T V\hat{x}_{k|k} + \mathbb{E}[e_{k|k}^T V\hat{x}_{k|k}|y_{0:k}, u_{0:k-1}] + \mathbb{E}[e_{k|k}^T V e_{k|k}|y_{0:k}, u_{0:k-1}] = \hat{x}_{k|k}^T V\hat{x}_{k|k} + \mathrm{tr}(VP_{k|k})$

Definiamo il costo ottimo in $[k, T-1]$ come

$$\begin{aligned} V_k^*(x_k) &= \min_{u_k,\dots,u_{T-1}} \mathbb{E}[(\sum_{h=k}^{T-1} x_h^T W x_h + u_h^T U u_h) + x_T^T W_T x_T|y_{0:k}, u_{0:k-1}] \\ &= \min_{u_k} \mathbb{E}[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + V_{k+1}^*(x_{k+1})|y_{0:k}, u_{0:k-1}] \end{aligned}$$

da cui si vede che

$$J_T^*(x_0) = \min_{u_0,\dots,u_{T-1}} J_T(u, x_0) = V_0^*(x_0)$$

Proposizione 13.1. *Sia $V_k^*(x_k)$ il costo ottimo in $[k, T-1]$. Vale allora la*

$$V_k^*(x_k) = \mathbb{E}[x_k^T S_k x_k|y_{0:k}, u_{0:k-1}] + c_k$$

***Dimostrazione*:** La dimostrazione avviene per induzione.
Se $i = T$ allora per definizione

$$V_i^*(x_i) = \mathbb{E}[x_T^T W_T x_T|y_{0:T}, u_{0:T-1}]$$

da cui $S_T = W_T$ e $c_k = 0$ Ipotizziamo che la relazione sia valida fino all'istante $i = k+1$ e dimostriamo la sua validità per $i = k$.

$$\begin{aligned} V_k^*(x_k) &= \min_{u_k} \mathbb{E}[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + V_{k+1}^*(x_{k+1})|y_{0:k}, u_{0:k-1}] \\ &= \min_{u_k} \mathbb{E}[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + \mathbb{E}[x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1}|y_{0:k+1}, u_{0:k}] + c_{k+1}|y_{0:k}, u_{0:k-1}] \\ &= \mathbb{E}[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1} + c_{k+1}|y_{0:k}, u_{0:k-1}] \end{aligned}$$

essendo $[y_{0:k}, u_{0:k-1}] \subseteq [y_{0:k+1}, u_{0:k}]$. Inoltre

$$x_{k+1}^T S_{k+1} x_{k+1} = (Ax_k + Bu_k + w_k)^T S_{k+1}(Ax_k + Bu_k + w_k) =$$

$$= x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + u_k^T B^T S_{k+1} B u_k + w_k^T S_{k+1} w_k + 2u_k^T B^T S_{k+1} w_k + 2x_k^T A^T S_{k+1} w_k + 2x_k^T A^T S_{k+1} B u_k =$$

$$= x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + u_k^T B^T S_{k+1} B u_k + w_k^T S_{k+1} w_k + 2x_k^T A^T S_{k+1} B u_k$$

da cui

$$\begin{aligned}
V_k^*(x_k) \quad &= \min_{u_k} \mathbb{E}[x_k^T W x_k + u_k^T U u_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + u_k^T B^T S_{k+1} B u_k + w_k^T S_{k+1} w_k + \\
&\quad + 2 x_k^T A^T S_{k+1} B u_k + c_{k+1} | y_{0:k}, u_{0:k-1}] \\
&= \mathbb{E}[x_k^T W x_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + w_k^T S_{k+1} w_k + c_{k+1} | y_{0:k}, u_{0:k-1}] + \\
&\quad + \min_{u_k} \mathbb{E}[u_k^T U u_k + u_k^T B^T S_{k+1} B u_k + 2 x_k^T A^T S_{k+1} B u_k | y_{0:k}, u_{0:k-1}] \\
&= \mathbb{E}[x_k^T W x_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + w_k^T S_{k+1} w_k + c_{k+1} | y_{0:k}, u_{0:k-1}] + \\
&\quad + \min_{u_k} (u_k^T (U + B^T S_{k+1} B) u_k + 2 \hat{x}_{k|k}^T A^T S_{k+1} B u_k)
\end{aligned}$$

Per ricavare

$$u_k^* = \text{argmin}_{u_k} V_k^*(x_k)$$

dall'espressione precedente, poniamo la derivata rispetto u_k uguale a zero e risolviamo l'equazione:

$$\begin{gathered}
2(U + B^T S_{k+1} B) u_k^* + 2 B^T S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} = 0 \\
u_k^* = -(U + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} = L_k \hat{x}_{k|k}
\end{gathered}$$

da cui si nota come u_k^* sia funzione lineare dello stato stimato. Sostituiamo ora l'espressione di u_k^* in quella di $V_k^*(x_k)$:

$$\begin{aligned}
V_k^*(x_k) \quad &= \mathbb{E}[x_k^T W x_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + w_k^T S_{k+1} w_k + c_{k+1} | y_{0:k}, u_{0:k-1}] + \\
&\quad - \hat{x}_{k|k}^T A^T S_{k+1} B (U + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A \hat{x}_{k|k} \\
&= \mathbb{E}[x_k^T W x_k + x_k^T A^T S_{k+1} A x_k + w_k^T S_{k+1} w_k + c_{k+1} | y_{0:k}, u_{0:k-1}] + \\
&\quad + \text{tr}(P_{k|k} M_k) - \mathbb{E}[\hat{x}_{k|k}^T M_k \hat{x}_{k|k} | y_{0:k}, u_{0:k-1}] \\
&= tr(P_{k|k} M_k) + \text{tr}(S_{k+1} Q) + \\
&\quad + \mathbb{E}[x_k^T (A^T S_{k+1} A + W - A^T S_{k+1} B (U + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A) x_k | y_{0:k}, u_{0:k-1}] + c_{k+1}
\end{aligned}$$

dove M_k è definita come:

$$M_k = A^T S_{k+1} B (U + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A$$

Dalla precedente espressione si evince che la tesi é verificata una volta posto

$$S_k = A^T S_{k+1} A + W - A^T S_{k+1} B (U + B^T S_{k+1} B)^{-1} B^T S_{k+1} A$$

$$c_k = c_{k+1} + \text{tr}(P_{k|k} M_k) + \text{tr}(S_{k+1} Q) = c_{k+1} + \text{tr}(P_{k|k}(A^T S_{k+1} A + W - S_k)) + \text{tr}(S_{k+1} Q)$$

□

Dalle considerazioni precedenti si ricava

$$J_T^*(x_0) = \mathbb{E}[x_0^T S_0 x_0] + \sum_{h=1}^{T-1} \operatorname{tr}(QS_{k+1} + P_{k|k}M_k)$$

Nel caso di orizzonte infinito, si definisce

$$J_\infty^*(x_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{J_T^*(x_0)}{T} = \operatorname{tr}(QS_\infty + P_\infty(A^T S_\infty A + W - S_\infty))$$

dove $S_\infty = \lim_{T\to\infty} S_0$ e $P_\infty = \lim_{k\to\infty} P_{k|k}$ se tali limiti esistono.