

## 9.1 Proprietà strutturali

Si vogliono determinare le proprietà strutturali della funzione di trasferimento

$$P_u(s) = K(sI - A)^{-1}B \quad (9.1)$$

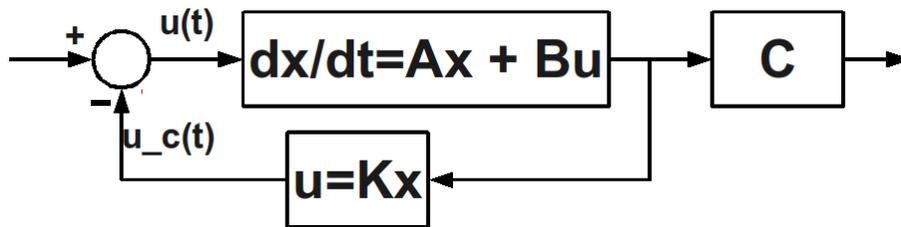


Figura 9.1. Schema a blocchi del sistema di controllo.

Si prenda l'equazione di Riccati

$$\bar{P}A + A^T\bar{P} + Q - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} = 0 \quad (9.2)$$

Il guadagno ottimo è dato da

$$u(t) = -Kx(t), \quad K = R^{-1}B^T\bar{P} \quad (9.3)$$

dal quale si ricavano le seguenti relazioni

1.  $B^T\bar{P} = RK$
2.  $K^T = \bar{P}BR^{-1}$
3.  $\bar{P}B = K^TR$

Utilizzando le relazioni sopra riportate per la riscrittura dell'equazione di Riccati si ottiene l'equazione

$$Q = K^T R K + \bar{P}(sI - A) + (-sI - A^T)\bar{P} \quad (9.4)$$

Ora si vuole continuare la manipolazione dell'equazione, premoltiplicando per  $B^T(-sI - A^T)^{-1}$  a sinistra, e per  $(sI - A)^{-1}B$  a destra. Si ottiene

$$B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B = B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T R K(sI - A)^{-1}B + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T R + R K(sI - A)^{-1}B$$

A questo punto si nota che la parte di destra dell'equazione ha la struttura di un quadrato. Per ottenere il quadrato si somma e si sottrae  $R$  alla parte destra dell'equazione. Raccogliendo si ottiene

$$B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B = (I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B) - R$$

Si è quindi arrivati all'equazione

$$R + B^T(-sI - A^T)^{-1}Q(sI - A)^{-1}B = (I + B^T(-sI - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(sI - A)^{-1}B)$$

che verrà valutata per  $s = j\omega$

$$R + B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}Q(j\omega I - A)^{-1}B = (I + B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(j\omega I - A)^{-1}B)$$

Si evidenzia il fatto che  $B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}Q(j\omega I - A)^{-1}B$  è sicuramente maggiore o uguale a zero. In quanto se prendo  $Q = Q^{1/2}Q^{1/2}$  si nota che equivale alla moltiplicazione di due parti che sono l'una la complessa coniugata dell'altra. Si sfrutta questo fatto per ottenere la disequazione

$$R \leq (I + B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}K^T)R(I + K(j\omega I - A)^{-1}B) \quad (9.5)$$

valida per ogni  $R$ .

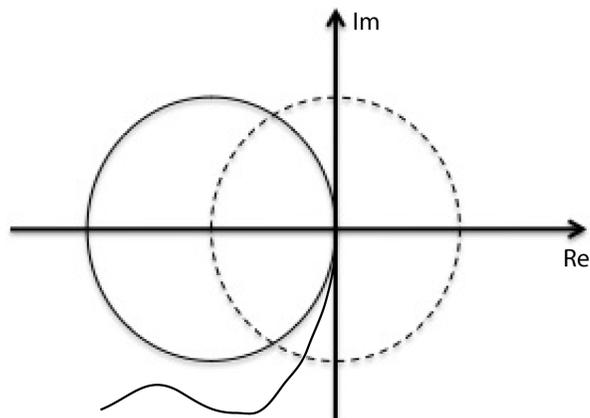
Nel caso SISO, con  $R = r$  la disequazione diventa

$$|1 + K(j\omega I - A)^{-1}B|^2 \geq 1 \quad (9.6)$$

dove  $K(j\omega I - A)^{-1}B = P_u(j\omega)$  risulta essere la funzione di trasferimento dalla quale si era partiti. Si noti che la disequazione equivale a scrivere il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento, che risulta essere del tipo in Figura 9.3.

Si nota che il diagramma di Nyquist della funzione  $P_u(j\omega)$  non può mai entrare all'interno della circonferenza di centro  $-1$  e raggio unitario. Per questo motivo il sistema risultante dall'applicazione del controllo ottimo risulta essere sempre stabile.

Il diagramma di Nyquist fornisce inoltre informazioni riguardanti il margine di fase ed il



**Figura 9.2.** Diagramma di Nyquist per una generica funzione di trasferimento. I cerchi corrispondono a cerchi unitari centrati in 0 e in  $-1$ .

margine di guadagno.

Il margine di fase è determinato dall'angolo tra il semiasse negativo delle ascisse e la retta congiungente l'origine del sistema di riferimento con il punto determinato dall'intersezione tra la circonferenza di raggio unitario, centrata nell'origine, ed il grafico di  $-P_u(j\omega)$ .

Il margine di guadagno è determinato da  $-1$  diviso per il valore del punto nel quale il diagramma di Nyquist di  $-P_u(j\omega)$  interseca l'asse delle ascisse ( si noti che sono entrambi valori reali negativi).

Per quanto detto si ottengono i seguenti valori

- Margine di fase:  $\phi_{MF} \geq \pi/3$
- Margine di guadagno:  $MG \in [1/2, +\infty]$

Nel caso multivariato si ottiene un comportamento analogo a quello illustrato nel caso SISO.

Come prima cosa si consideri il caso nel quale  $R$  sia una matrice diagonale del tipo  $R = \rho I$ . In questo caso la disequazione (9.5) è equivalente a

$$\underline{\sigma}(I + K(j\omega - A)^{-1}B) \geq 1 \quad (9.7)$$

L'equazione (9.7) significa che il valore singolare più piccolo è sempre maggiore o uguale a uno per ogni frequenza.

Nel caso più generale, nel quale la struttura di  $R$  è generica, la disequazione (9.5) diventa

$$I \leq R^{-1/2}(I + B^T(-j\omega I - A^T)^{-1}K^T)R^{1/2}R^{1/2}(I + K(j\omega I - A)^{-1}B)R^{-1/2}$$

che è equivalente ad affermare che

$$\sigma(R^{1/2}(I + K(j\omega - A)^{-1}B)R^{-1/2}) \geq 1 \quad (9.8)$$

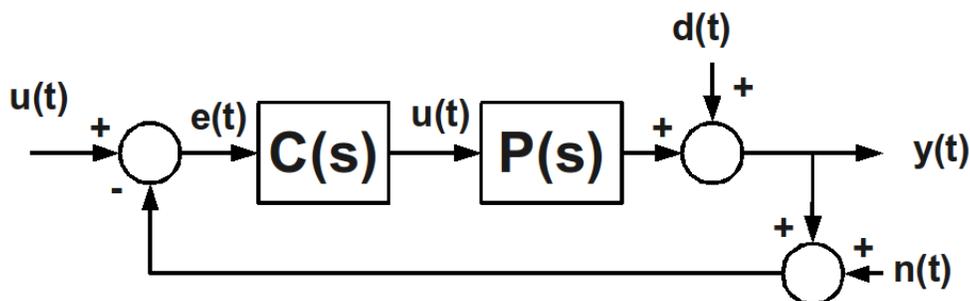
In questo caso, considerando  $R$  non diagonale, vengono privilegiate certe direzioni. Per quanto riguarda la proprietà di robustezza del sistema, nel caso multivariato, potrebbe essere conveniente prendere  $R$  non diagonale. Infatti, per  $R$  diagonale, il sistema potrebbe risultare poco robusto.

A questo punto si vuole analizzare la funzione di sensitività

$$S(j\omega) = (I + K(j\omega - A)^{-1}B)^{-1} \quad (9.9)$$

In particolare si vuole analizzare in che modo la funzione di sensitività  $S$  è legata alle proprietà di robustezza del sistema.

Si consideri uno schema di controllo classico (alla controlli automatici) in Figura 9.3.



**Figura 9.3.** Sistema di controllo in catena chiusa.

Le funzioni di trasferimento del sistema risultano essere

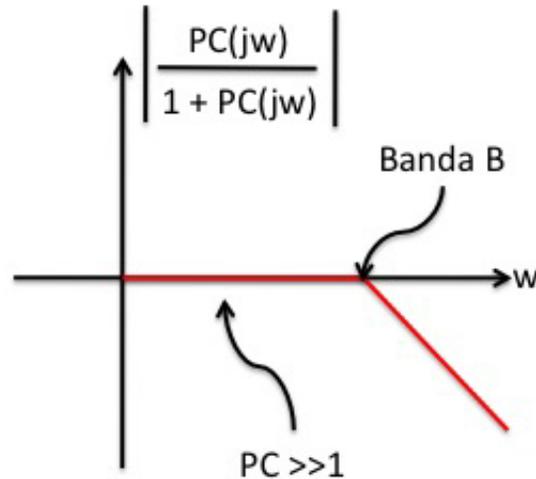
$$\begin{aligned} y &= PC(I + PC)^{-1}(r - n) + (I + PC)^{-1}d \\ e &= (I + PC)^{-1}(r - d) - (I + PC)^{-1}n \\ u &= C(I + PC)^{-1}(r - n - d) \end{aligned}$$

Si vuole ottenere  $PC(I + PC)^{-1} \simeq I$  per un certo intervallo di frequenze, affinché l'uscita del sistema segua correttamente il riferimento.

In un sistema SISO si vuole ottenere un diagramma di Bode del tipo in Figura 9.4.

Si chiami

$$(I + PC)^{-1} = S \quad (9.10)$$



**Figura 9.4.** Sistema di controllo in catena aperta.

nella zona del diagramma di Bode nella quale  $PC \gg 1$  e  $\omega$  è minore della banda  $B$  si ha

$$u = C(I + PC)^{-1}(r - n - d) \simeq P^{-1}(r - n - d)$$

Si chiami  $T = PC(I + PC)^{-1}$  la funzione complementare ad  $S$ , per la quale si ha  $S + T = 1$   
In conclusione, per  $\omega$  minore della frequenza  $B$ , si ha

$$\begin{aligned} |S(j\omega)| &\ll 1 \text{ nel caso SISO} \\ \bar{\sigma}(S(j\omega)) &\ll 1 \text{ nel caso MIMO} \end{aligned}$$

dove, con  $\bar{\sigma}$ , si indica il massimo valore singolare della matrice.

In conclusione quello che si vuole ottenere è:

- $|S(j\omega)| \ll 1$  per fare il tracking del riferimento
- $|S(j\omega)| \ll 1$  per la reiezione ai disturbi
- $P(j\omega)$  non troppo piccolo per frequenze  $\omega$  minori della banda  $B$ . In quanto l'ingresso  $u$  per quelle frequenze risulta dipendere da un fattore  $P^{-1}$  che non deve essere un valore troppo elevato, per non rendere  $u$  eccessivamente grande.  
In particolare questo obiettivo richiede una opportuna scelta della banda  $B$  in base alla banda degli attuatori e dei sensori.



Figura 9.5. Sistema di controllo in catena aperta.

Si noti che se si avesse una conoscenza esatta della matrice  $P$  allora lo schema di controllo classico sarebbe totalmente equivalente allo schema di controllo in catena aperta

Infatti si ha che la funzione di trasferimento del sistema è la stessa della funzione di trasferimento del sistema in catena chiusa.

Chiamando  $y_{cc}$  l'uscita del sistema in catena chiusa, e con  $y_{ff}$  l'uscita del sistema in catena aperta, si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial y_{cc}}{\partial \theta} &= (I + P(j\omega; \theta_{nom})C(j\omega))^{-1} \frac{\partial y_{ff}}{\partial \theta} \\ &= S(j\omega) \frac{\delta y_{ff}}{\delta \theta}\end{aligned}$$

dove  $P(j\omega; \theta)$  indica la funzione di trasferimento del processo,  $\theta$  sono alcuni parametri del processo non noti o solo parzialmente noti ( si pensi ad esempio alla costante elastica o al coefficiente di attrito viscoso del giunto flessibile in laboratorio ), e  $\theta_{nom}$  sono i valori nominali di questi parametri. Da questa equazione si può notare che la variabilità dell'uscita  $y$  del sistema in catena chiusa rispetto alla variabilità dei parametri è dipende da  $S(j\omega)$ . Anche per questo motivo si vuole ottenere una  $S(j\omega)$  piccola.

Si è già visto che la funzione di sensibilità, nel caso di un sistema di controllo classico a catena chiusa, ha la struttura  $S = (I + PC)^{-1}$ .

Nel caso del controllo ottimo, nel caso SISO, si ha che la funzione di sensibilità vale

$$|S(j\omega)| = \frac{1}{|1 + K(j\omega - A)^{-1}B|} \leq 1 \quad (9.11)$$

Quindi, anche da questo punto di vista, il controllo ottimo da buone prestazioni.

Nel caso MIMO si ha

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(S(j\omega)) &\leq 1 \text{ per } R = \rho I \text{ è diagonale} \\ \bar{\sigma}(R^{1/2}S(j\omega)R^{-1/2}) &\leq 1 \text{ per } R \text{ generica}\end{aligned}$$