

Lezione 8 — 23 Marzo

Docente: Luca Schenato

Stesore: Baseggio Mauro, Bristot Francesca, Pozzi Mauro

8.1 Luogo delle radici per sistemi SISO

Prendiamo nuovamente in considerazione il sistema introdotto nella lezione precedente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

rappresentato dalla figura 8.1. Poniamo che l'ingresso esterno (sommato a u_c) sia $u_{ext} = 0$ con u scalare e $x \in \mathbb{R}^n$ e $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

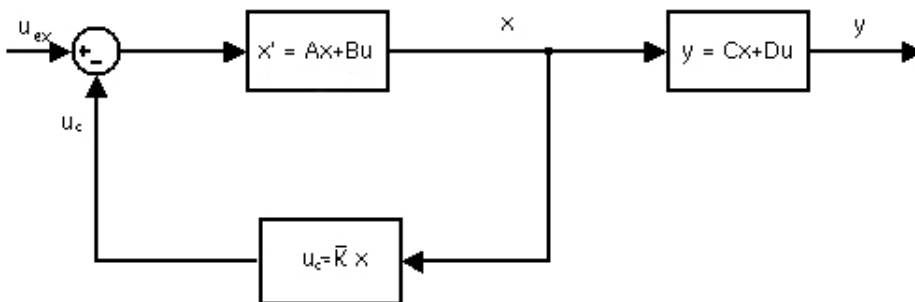


Figura 8.1. Schema a retroazione

Possiamo scrivere così la funzione di trasferimento del sistema originale in catena aperta $P(s) = C(sI - A)^{-1}B$, mentre la funzione di trasferimento in catena aperta da u e u_c risulterà $P_u(s) = K(sI - A)^{-1}B$. L'indice di costo da minimizzare viene preso in questo modo:

$$\int_0^\infty x^T Q x + u^T R u dt = \int_0^\infty x^T C^T C x + r \cdot u^2 dt = \int_0^\infty y^2(t) + u^2(t)r dt$$

consideriamo anche valide le condizioni (A,B) stabilizzabile e (A, $Q^{1/2}$) -oppure nel nostro caso (A,C)- rivelabile. Cerchiamo gli autovalori di $A - BK$, il sistema in catena chiusa al variare del parametro r .

$$\lambda(A - BK) = \{ \lambda \in \lambda(H) \text{ tale che } Re[\lambda] < 0 \}$$

Per trovare i poli in catena chiusa devo trovare quindi gli autovalori di H:

$$H = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{r}BB^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - H) = \det \begin{bmatrix} sI - A & \frac{1}{r}BB^T \\ C^T C & sI + A^T \end{bmatrix}$$

Per calcolare il determinante sfrutteremo le seguenti proprietà:

1. $\det(AB) = \det(BA)$, dove le matrici A e B sono quadrate
2. $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B)$ se le matrici A e D sono quadrate ed A è invertibile
3. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ dove $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$
4. $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ dove λ_i autovalori di $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ contati con la loro molteplicità algebrica (questa proprietà si vede facilmente a partire da $A = TJT^{-1}$ dove J è matrice in forma di Jordan e osservando che $\text{tr}(A) = \text{tr}(TJT^{-1}) = \text{tr}(T^{-1}TJ) = \text{tr}(J)$)
5. Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ si consideri la matrice di rango unitario $E = xy^T$. Avendo rango unitario la matrice E deve avere $n - 1$ autovalori uguali a zero da cui si ricava

$$\begin{aligned} \lambda(xy^T) &= \{\lambda_1 = \bar{\lambda} \neq 0 \text{ e } \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0\} \\ \lambda(I + xy^T) &= \{\lambda_1 = \bar{\lambda} + 1 \neq 0 \text{ e } \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1\} \\ \text{tr}(E) &= \sum_i \lambda_i = \bar{\lambda} = \text{tr}(xy^T) = \text{tr}(\underbrace{y^T x}_{\text{scalare}}) = y^T x \\ \det(I + E) &= 1 + \bar{\lambda} = 1 + \text{tr}(E) \end{aligned}$$

Esposte le proprietà di cui ci serviremo nella dimostrazione andiamo a calcolare il determinante cercato, i numeri in basso tra parentesi indicheranno le proprietà usate di volta in volta.

$$\begin{aligned}
\det(sI - H) &\stackrel{(2)}{=} \det(sI - A) \det \left(sI + A^T - CC^T (sI - A)^{-1} \frac{1}{r} BB^T \right) \\
&= \det(sI - A) \det \left((sI + A^T) \left(I - \frac{1}{r} \underbrace{C(sI - A)^{-1} B (sI + A^T)^{-1} C^T B^T}_{P(s)} \right) \right) \\
&\stackrel{(1)}{=} \det(sI - A) \underbrace{\det(sI + A^T)}_{=\det(sI + A)} \det \left(\underbrace{I - \frac{1}{r} P(s) (sI + A^T)^{-1} C^T B^T}_{\text{rango unitario}} \right) \\
&= \det(sI - A) \det(sI + A) \left(1 - \frac{1}{r} P(s) \underbrace{\text{tr} \left((sI + A^T)^{-1} C^T B^T \right)}_{(3+5)} \right) \\
&= \det(sI - A) \det(sI + A) \left(1 - \frac{1}{r} P(s) \underbrace{B^T (sI + A^T)^{-1} C^T}_{\text{trasposto di uno scalare}} \right) \\
&= \det(sI - A) \det((-1)(-sI - A)) \left(1 - \frac{1}{r} P(s) C (sI + A)^{-1} B \right) \\
&= -(1)^n \det(sI - A) \det(-sI - A) \left(1 + \frac{1}{r} P(s) \underbrace{C(-sI - A)^{-1} B}_{P(-s)} \right) \\
&= -(1)^n \det(sI - A) \det(-sI - A) \left(1 + \frac{1}{r} P(s) P(-s) \right) \\
&= -(1)^n d(s) d(-s) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{n(s)}{d(s)} \frac{n(-s)}{d(-s)} \right)
\end{aligned}$$

l'ultimo passaggio deriva dal fatto che $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ e $d(s) = \det(sI - A)$. Se ora imponiamo l'uguaglianza a zero troviamo le radici, vale a dire gli autovalori cercati.

$$d(s)d(-s) + \frac{1}{r} n(s)n(-s) = 0$$

Possiamo riscrivere l'equazione in una forma riconducibile al luogo delle radici, in cui il parametro $\kappa = \frac{1}{r}$ e $P(s)P(-s) = G(s)$.

$$1 + \kappa G(s) = 0$$

Osservazione Si noti come la funzione di trasferimento $G(s)$ sia la stessa per funzioni di trasferimento $P(s)$ i cui poli hanno poli e zeri con segno opposto. Per esempio

$$P_1(s) = \frac{s+1}{s+2}, P_2(s) = \frac{s-1}{s+2}, P_1(s) = \frac{s+1}{s-2}, P_1(s) = \frac{s-1}{s-2} \implies G(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s-2)(s+2)}$$

quindi i poli in catena chiusa dei sistemi retroazionati coincidono per lo stesso valore r del peso. Va comunque fatto notare che questo non implica che la matrice di retroazione K^* ottenuta tramite controllo ottimo LQ ed il sistema in catena chiusa $P_{cc}(s)$ corrispondente siano gli stessi per le quattro funzioni di trasferimento.

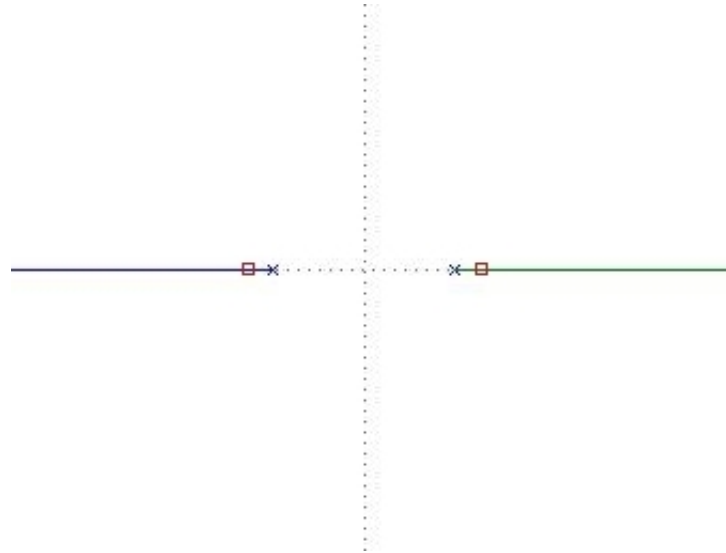


Figura 8.2. Luogo delle radici simmetrizzato

Esempio

Vediamo il comportamento di una funzione $P(s) = \frac{1}{s-\alpha}$ con $\alpha < 0$.

Quando $r \rightarrow \infty$ ci troviamo sul polo a parte reale negativa, quando $r \rightarrow 0$ ci muoviamo lungo gli asintoti orizzontali.

Se ora torniamo all'equazione $d(s)d(-s) + \frac{1}{r}n(s)n(-s) = 0$ possiamo studiare cosa accade per r che tende a infinito o a zero.

- $r \rightarrow \infty$ in questo caso le radici di $\det(sI - H)$ coincidono con quelle di $d(s)d(-s)$
- $r \rightarrow 0$ in questo caso le radici di $\det(sI - H)$ coincidono con quelle di $n(s)n(-s)$

Se ho uno zero a parte reale negativa il polo va posizionato sopra allo zero, se invece è a parte reale positiva il polo si pone sul simmetrico dello zero, che avrà parte reale negativa.

8.1.1 Asintoti

Se definiamo $n = \deg[d(s)]$ e $p = \deg[n(s)]$ il numero di asintoti che trovo sarà pari a $2(n-p)$ e la loro disposizione dipende dal fatto che $(n-p)$ sia pari o dispari, vediamo quindi i 2 casi:

- $(n-p)$ dispari: gli asintoti sono $\frac{\pi}{n-p}j$ con $j = 0, 1, \dots, 2(n-p) - 1$
- $(n-p)$ pari: gli asintoti sono $\frac{\pi}{n-p}(j + \frac{1}{2})$ con $j = 0, 1, \dots, 2(n-p) - 1$

8.2 Esempi

- Funzione di trasferimento: $P(s) = \frac{1}{s^2}$ in figura 8.3
 - Numero asintoti = $(n-p) = 2$
 - Posizione asintoti per $j = 0$: $\frac{\pi}{n-p}j + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

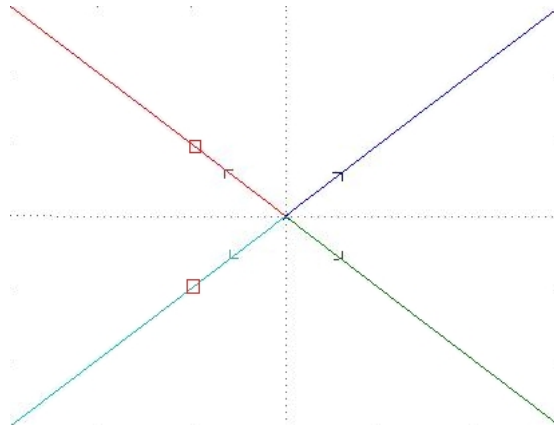


Figura 8.3. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc

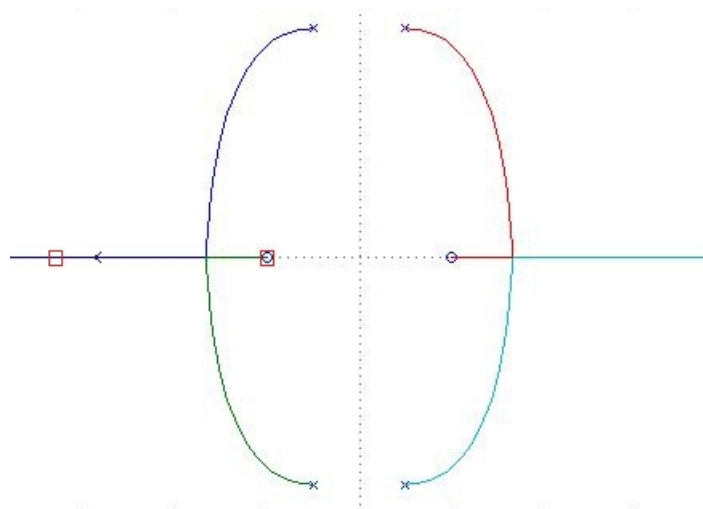


Figura 8.4. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc

- Due zeri in posizione simmetrica in fig. 8.4
- Due poli complessi coniugati a parte reale negativa. (fig. 8.5)
- Due poli complessi coniugati a parte reale nulla. (fig. 8.6)
- Due poli simmetrici, uno a parte reale positiva uno a parte reale negativa. (fig. 8.7)

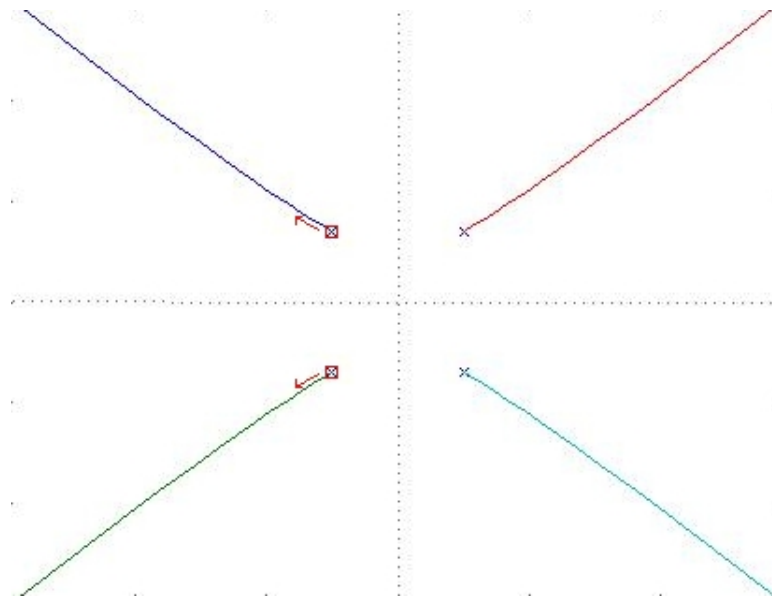


Figura 8.5. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc

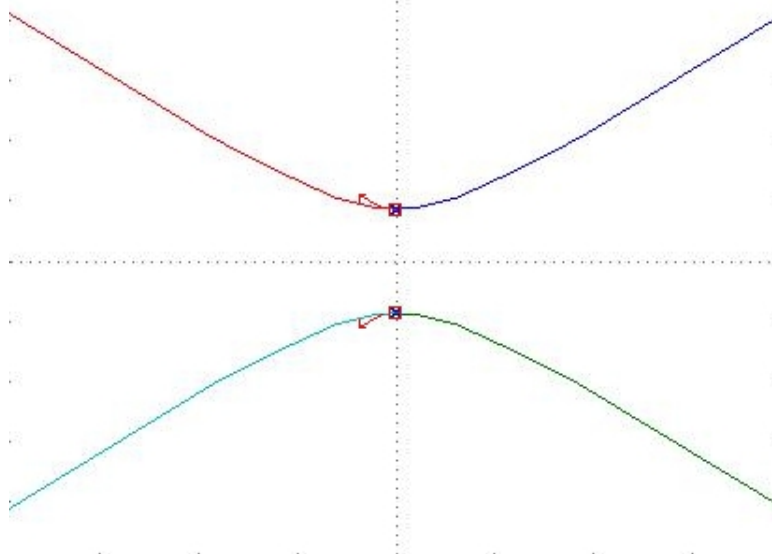


Figura 8.6. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc

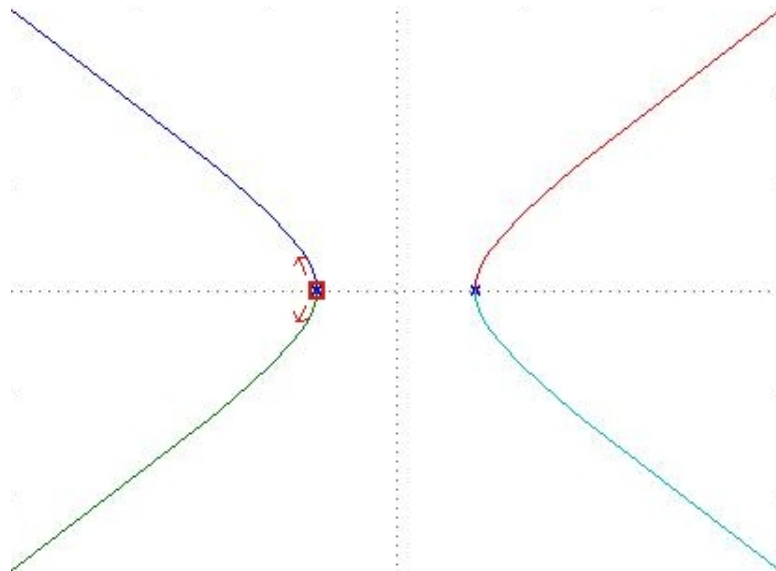


Figura 8.7. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc