LabCont2: Laboratorio di Controlli 2	**a.a. 2009-2010**
Lezione 4 — Marzo 9	
Docente: Luca Schenato	*Stesore: R. Alberton, M. Pattarello, K. Schmiedhofer*

4.1 Equazione di Jacobi-Bellman nel caso scalare

Si considera l'equazione appena ricavata con parametri scalari. Il sistema ha la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t),\ x(0) = x_0 \\ l(x,u) &= qx^2 + ru^2 \\ m(x(T)) &= q_T \end{aligned} \tag{4.1}$$

Senza perdita di generalità b può essere preso uguale a 1, in quanto non ha altro effetto che riscalare la variabile r. Inoltre anche q e' scelto uguale a 1 in quanto la soluzione dipende solo il rapporto tra r e q. Inserendo questa dinamica nella formula per l'equazione differenziale di Riccati si trova:

$$-\dot{p} = 2pa + 1 - \rho p^2,\ \rho = \frac{1}{r} \tag{4.2}$$

Risolvendo in forma esplicita

$$\begin{aligned} -\frac{dp}{dt} &= 2pa + 1 - \rho p^2 \\ \frac{dp}{dt} &= \rho\left(p^2 - \frac{2a}{\rho}p - \frac{1}{\rho}\right) \\ &= \rho(p-p_1)(p-p_2) \end{aligned} \tag{4.3}$$

si ottiene una equazione di secondo grado con due radici p_1 e p_2. Poichè $-\frac{1}{\rho} = p_1 p_2$ allora le due radici devono essere reali ed in particolare una positiva ed una negativa:

$$p_1 < 0, \qquad p_2 > 0 \tag{4.4}$$

Si riordina la forma differenziale del primo ordine per semplificare l'integrazione successiva,

$$\frac{dp}{(p-p_1)(p-p_2)} = \rho d\tau$$

si calcola l'integrale lungo gli estremi

$$\int_{p(t)}^{p(T)} \frac{dp}{(p-p_1)(p-p_2)} = \int_t^T \rho d\tau \tag{4.5}$$

e per risolverlo bisogna scomporre la funzione razionale. Di seguito viene esposto un breve conto intermedio, per trovare i fratti semplici.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} &= \frac{\alpha}{(p-p_1)} + \frac{\beta}{(p-p_2)} \\ &= \frac{\alpha p - \alpha p_2 - \beta p - \beta p_1}{(p-p_1)(p-p_2)} \end{aligned}$$

Ora basta eguagliare le due equazione e risolvendo questo semplice sistema lineare a due incognite si ricavano i due parametri α e β :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\alpha+\beta) & = & 0 \\ (-\alpha p_2 - \beta p_1) & = & 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & -\frac{1}{p_2-p_1} \\ \beta & = & \frac{1}{p_2-p_1} \end{array} \right.$$

Questo risultato permette di riscrivere l'integrale (4.5) come

$$\int_{p(t)}^{p(T)} \frac{1}{(p_1-p_2)} \left(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2} \right) = \rho(T-t) \tag{4.6}$$

ricordando che il logaritmo è la primitiva di una frazione semplice

$$\frac{1}{(p_1-p_2)} \left(\ln(p-p_1)\Big|_{p(t)}^{q_T} - \ln(p-p_2)|\Big|_{p(t)}^{q_T} \right) = \rho(T-t) \tag{4.7}$$

e alla fine si valuta l'integrale lungo i suoi estremi.

$$\rho(p_1-p_2)(T-t) = \ln\left(\frac{(q_T-p_1)}{(p(t)-p_1)} \frac{(p(t)-p_2)}{(q_T-p_1)} \right) \tag{4.8}$$

Ora si rinomina per semplicità l'esponenziale con la funzione $g(t)$

$$\underbrace{e^{\rho(p_1-p_2)(T-t)}}_{g(t)} = \frac{(q_T-p_1)}{(p(t)-p_1)} \frac{(p(t)-p_2)}{(q_T-p_1)} \tag{4.9}$$

L'obiettivo è di evidenziare il termine $p(t)$

$$g(t)(q_T - p_2)p(t) - g(t)(q_T - p_2)p_1 = (q_T - p_1)p(t) - (q_T - p_1)p_2 \tag{4.10}$$
$$p(t)\left[g(t)(q_T - p_2) - (q_T - p_1)\right] = g(t)(q_T - p_2)p_1 - (q_t - p_1)p_2 \tag{4.11}$$

dividendo per il termine sulla sinistra si trova il parametro cercato:

$$\Rightarrow \; p(t) = \frac{e^{\rho(p_1-p_2)(T-t)}(q_T - p_2)p_1 - (q_T - p_1)p_2}{e^{\rho(p_1-p_2)(T-t)}(q_T - p_2) - (q_T - p_1)} \tag{4.12}$$

Per verificare la correttezza di questi calcoli, si valuta la formula precedente all'istante $t = T$, se è esatta si dovrebbe trovare $p(T) = q_T$:

$$\begin{aligned} p(T) &= \frac{\overbrace{e^{\rho(p_1-p_2)(T-T)}}^{=1}(q_T - p_2)p_1 - (q_T - p_1)p_2}{\underbrace{e^{\rho(p_1-p_2)(T-T)}}_{=1}(q_T - p_2) - (q_T - p_1)} \\ &= \frac{(q_T - p_2)p_1 - (q_T - p_1)p_2}{(q_T - p_2) - (q_T - p_1)} \\ &= \frac{q_T p_1 - p_2 p_1 - q_T p_2 - p_1 p_2}{-p_2 + p_1} \\ &= \frac{q_T(p_1 - p_2)}{p_1 - p_2)} = q_T \end{aligned}$$

Si può inoltre esservare che facendo tendere a ∞ l'estremo T la funzione $p(t)$ in 0 $p(0)$ converge a:

$$\lim_{T\to\infty} p(0) = \frac{-(q_T - p_1)p_2}{-(q_T - p_1)} = p_2 \tag{4.13}$$

Vuol dire che per T che tende ad infinito, la soluzione converge alla radice stabile p_2 in maniera indipendente dalla condizione finale q_T con velocità che dipende sia dalla soluzione positiva sia da quella negativa dell'equazione di Riccati. Un tipico andamento della funzione p(t) per due differenti valori di q_T si può vedere nella Figura 4.1.

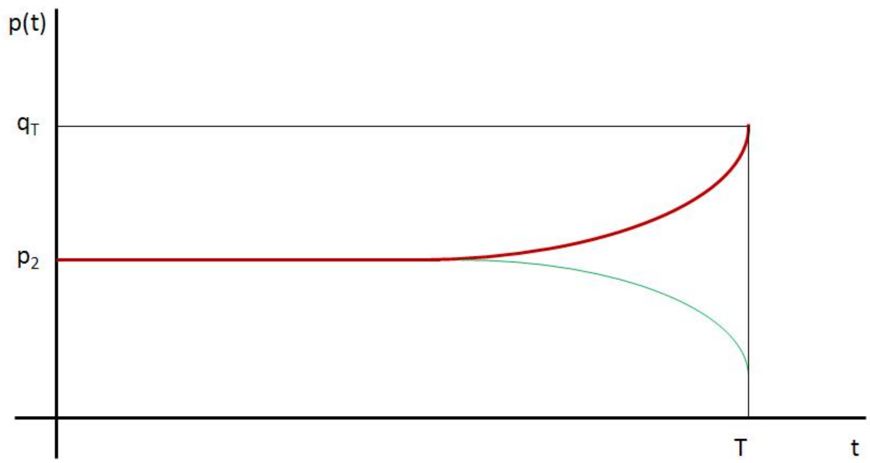

Figura 4.1. Soluzione dell'equazione di Riccati $p(t)$ in funzione del tempo per due differenti valori della condizione finale q_T.

In generale si può osservare che la soluzione $p(t)$ e' stata ottenuta risolvendo due sistemi lineari associati alle radici dell'equazione di Riccati. Il fatto di poter ricostruire l'evoluzione della matrice $P(t)$ dalla soluzione di un sistema lineare di dimensione doppia rispetto alla dimensione di $P(t)$ è un caratteristica strutturale dell'equazione di Riccati che è estendibile anche al caso multivariabile. In particolare si vedrà che la soluzione $P(0)$ per $T \rightarrow \infty$, sotto opportune ipotesi, converge all'unica soluzione semidefinita positiva dell'equazione di Riccati.