LabCont2: Laboratorio di Controlli 2	a.a. 2009-2010

Lezione 3 — Marzo 8

Docente: Luca Schenato *Stesore: R. Alberton, M. Pattarello, K. Schmiedhofer*

3.1 Controllo ottimo nel continuo: Equazione di Hamilton Jacobi Bellman

Il controllo ottimo permette di controllare sistemi discreti o continui attraverso l'inserimento di un ingresso u, calcolato minimizzando un funzionale di costo.
Nel caso di sistemi lineari continui si ha:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(0) = x_0 \tag{3.1}$$

Dove il funzionale di costo è rappresentato dalla funzione:

$$J(u, x_0) = \int_0^T [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]\, dt + x^T(T)Q_T x(T) \tag{3.2}$$

Con Q e Q_T matrici $n \times n$ (n=numero stati) simmetriche e semidefinite positive e con R matrice $m \times m$ (m=numero ingressi) simmetrica e definita positiva, l'ingresso $u[0, T]$ è un funzionale tra 0 e T.

Nel caso di sistemi lineari discreti si ha invece:

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k),\ x(0) = x_0 \tag{3.3}$$

Dove il funzionale di costo è rappresentato dalla funzione:

$$J(u, x_0) = \sum_{k=0}^{T-1} x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) + x^T(T)Q_T x(T) \tag{3.4}$$

Con Q e Q_T matrici $n \times n$ simmetriche e semidefinite positive e con R matrice $m \times m$ simmetrica e definita positiva. L'ingresso è $u = (u(0), \ldots, u(T - 1))$.
Ci si concentra ora sul problema del controllo ottimo in un generico sistema continuo non lineare tempo variante. Il sistema è dunque:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t),\ x(0) = x_0 \tag{3.5}$$

Il funzionale di costo è rappresentato dalla funzione:

$$V(x(t),u,t) = \int_t^T \ell(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + m(x(T)) \tag{3.6}$$

dove $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ e $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, e l'ingresso $u[t,T]$ è un funzionale tra t e T. L'ingresso ottimo è chiaramente quello che minimizza tale funzione e per il proseguo si definisce:

$$\begin{aligned} V^*(x(t),t) &= \min_{u[t,T]} V(x(t),u,t) \\ &= \min_{u[t,T]} \int_t^T \ell(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + m(x(T)) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Si noti che $V^*(x(t),t)$ è indipendente da u perchè la conoscenza dello stato iniziale $x(t)$ e dell'istante t determina l'ingresso u poichè quest'ultimo deve minimizzare l'indice $V(x(t),u,t)$. Il fatto che $V(x(t),u,t)$ parta da t significa che l'ingresso deve essere ottimo per ogni istante, ovvero se l'ingresso è ottimo da t a T dovrà anche essere ottimo da t_1 a T con $t_1 > t$ pertanto si ha:

$$\begin{aligned} V^*(x(t),t) &= \min_{u[t,t_1]} \big[\min_{u[t_1,T]} \int_t^{t_1} \ell(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \int_{t_1}^T l(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + m(x(T))\big] \\ &= \min_{u[t,t_1]} \big[\int_t^{t_1} \ell(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + \min_{u[t_1,T]} \int_{t_1}^T l(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + m(x(T))\big] \\ &= \min_{u[t,t_1]} \big[\int_t^{t_1} \ell(x(\tau),u(\tau),\tau)d\tau + V^*(x(t_1),t_1)\big] \end{aligned} \tag{3.8}$$

Si ricorda che l'espansione di Taylor centrata in x_0 della funzione $f(x)$ è data da:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + o(x - x_0) \tag{3.9}$$

Che applicato a $V^*(x(t),t)$ centrato in t con $t_1 = t + \epsilon$ permette di vedere cosa accade in istanti prossimi a t:

$$V^*(x(t),t) = \min_{u[t,t+\epsilon]} \Big[V^*(x(t),t) + \ell(x(t),u(t),t)\epsilon + \left.\frac{\partial V^*}{\partial t}\right|_{x(t),t} \epsilon + \left.\frac{\partial V^*}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{x(t),u(t),t} \epsilon + o(\epsilon)\Big] \tag{3.10}$$

Facendo il limite per $\epsilon \to 0$ della precedente equazione, si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial V^*}{\partial t} = -\min_{u(t)} \left[l(x(t), u(t), t) + \left. \frac{\partial V^*}{\partial x} \right|_{x(t),t} f(x(t), u(t), t) \right] \tag{3.11}$$

In questa equazione ℓ e f sono funzioni note, mentre V^* è incognita. In questa forma non si tratta ancora di una equazione differenziale parziale. E' necessario trovare l'ingresso ottimo che la minimizza tale indice che ovviamente dipenderà da $x(t)$, $\frac{\partial V^*}{\partial t}$ e t. Questo significa che il controllo ottimo è causale, cioè dipende solo dal passato. Indicheremo con $\hat{u}(t) = \hat{u}(x(t), \frac{\partial V^*}{\partial x}(x(t), t), t)$, l'ingresso che minimizza tale indice. Inserendo tale ingresso ottimo nella precendente equazione si ottiene così un equazione solo in $x(t)$ e t alle derivate parziali con condizione al contorno data da:

$$V^*(x(T), T) = m(x(T)) \tag{3.12}$$

L'Equazione (3.11) insieme alla condizione (3.12) è chiamata l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman.

Si considera ora il caso a tempo discreto discreto. L'evoluzione degli stati è data dall'equazione:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k, k)$$

e il valore minimo dell'indice $V(x_k, k)$ sarà:

$$V^*(x_k, k) = \min_{u_k, \ldots, u_{T-1}} \Big\{ \sum_{h=k}^{T-1} \ell(x_h, u_h, h) + m(x_T) \Big\}$$

In maniera simile al caso continuo, il precedente problema di ottimizzazione è equivalente a trovare V^* che soddisfa la seguente equazione:

$$\begin{aligned} V^*(x_k, k) &= \min_{u_k} \Big\{ l(x_k, u_k, k) + V^*(x_{k+1}, k+1) \Big\} \\ &= \min_{u_k} \Big\{ l(x_k, u_k, k) + V^*(f(x_k, u_k, k), k+1) \Big\} \end{aligned} \tag{3.13}$$

che assieme alla condizione finale $V^*(x_T, T) = m(x(T))$ e nota come Equazione di Bellman. Indicheremo con $\hat{u}_k = \hat{u}_k(x_k, k)$ l'ingresso che minimizza tale indice.

Torniamo ora al caso a tempo continuo per sistemi lineari tempo-invarianti. Si vuole quindi risolvere l'equazione (3.11), avendo il sistema lineare tempo-invariante[1]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \ x(0) = x_0 \tag{3.14}$$

Con :

$$\ell(x, u, t) = x^T Qx + u^T Ru, \quad R > 0 \ \ m(x) = x^T Q_T x \tag{3.15}$$

La matrice R viene scelta definita positiva in quanto l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman potrebbe non risultare ben definita.
È possibile dimostrare che l'unica funzione V^* che può soddisfare l'equazione (3.11) è di tipo quadratico, cioè del tipo:

$$V^*(x, t) = x^T P(t)x \tag{3.16}$$

dove si assume senza perdita di generalità che $P(t) = P^T(t)$, cioè simmetrica. Infatti, sebbene non sia necessario che P sia simmetrica per soddisfare l'equazione (3.11), tuttavia la parte antisimmetrica che porta alcun contributo in quanto se $P^T = -P$ si ha che $x^T Px = (x^T Px)^T = x^T P^T x = -x^T Px = 0$.
Si cercherà ora di calcolare l'ingresso ottimo $\hat{u}(t)$ e la matrice $P(t)$. Per alleggerire la notazione si svolgeranno i conti con matrici tempo costanti ma considerazioni analoghe valgono per matrici tempo varianti. Sostituendo le ipotesi fatte nell'equazione (3.11) si ottiene:

$$\begin{aligned} x^T \dot{P}x &= -\min_u \left\{ x^T Qx + u^T Ru + 2x^T P(Ax + Bu) \right\} \\ &= -\min_u \left\{ x^T Qx + u^T Ru + 2x^T PAx + 2x^T PBu \right\} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ora per trovare il minimo basta fare la derivata rispetto a u e porla uguale a zero:

$$\frac{\partial}{\partial u}(x^T Qx + u^T Ru + 2x^T PAx + 2x^T PBu) = 0 \tag{3.18}$$

Risolvendo si ottiene:

$$2u^T R + 2x^T PB = 0$$

che trasposta permette di ottenere l'ingresso ottimo $\hat{u}$ cercato:

$$Ru + B^T Px = 0 \Rightarrow \hat{u} = -R^{-1} B^T Px \tag{3.19}$$

Noto l'ingresso che minimizza la (3.17) è possibile ricavarsi la P andando a sostituire nella medesima equazione $\hat{u}$:

[1]Le equazioni seguenti sono valide anche nel caso di sistemi lineari tempo varianti semplicemente operando le sequenti sostituzioni $A = A(t), B = B(t), Q = Q(t), R = R(t)$.

$$\begin{aligned} x^T\dot{P}x &= -\left\{x^TQx + x^TPBR^{-1}RR^{-1}B^TPx + 2x^TPAx - 2x^TPBR^{-1}B^TPx\right\} \\ &= -\left\{x^TQx + 2x^TPAx - x^TPBR^{-1}B^TPx\right\} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Poiche' abbiamo detto che ci restringiamo a cercare P simmetriche, possiamo osservare che:

$$2x^TPAx = x^TPAx + (x^TPAx)^T = x^TPAx + x^TA^TPx \tag{3.21}$$

pertanto si ottiene che P deve soddisfare la sequente equazione:

$$-\dot{P}(t) = Q + P(t)A + A^TP(t) - P(t)BR^{-1}B^TP(t), \quad P(T) = Q_T \tag{3.22}$$

e questa è l'equazione differenziale di Riccati. È possibile dimostrare che $P(t)$ esiste per ogni $t \in [0, T]$ nonostante il sistema sia non-lineare, quindi e' possibile ottenere P(t) integrando a ritroso partendo dalla condizione finale $P(T) = Q_T$.