

## 17.1 Metodo di identificazione ai sottospazi

### 17.1.1 Identificazione delle matrici A e C

Riprendiamo brevemente la notazione usata nella lezione precedente per indicare gli spazi generati dalle variabili aleatorie  $y(\cdot)$  rappresentanti le uscite, considerate negli intervalli di tempo  $[0, k - 1]$  (passato rispetto all'istante  $k$ ) e  $[k, 2k - 1]$  (futuro a orizzonte finito rispetto all'istante  $k$ ):

$$\mathcal{Y}_- = \text{span} \begin{bmatrix} y(k-1) \\ \vdots \\ y(0) \end{bmatrix} \quad \mathcal{Y}_+ = \text{span} \begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(2k-1) \end{bmatrix}$$

E' possibile svolgere l'analisi di correlazione canonica (CCA) tra  $\mathcal{Y}_+$  e  $\mathcal{Y}_-$ . In primo luogo si esegue la scomposizione ai valori singolari (SVD) della versione normalizzata della covarianza  $\Sigma_{+-}$  ottenendo

$$\Sigma_{++}^{-1/2} \Sigma_{+-} (\Sigma_{--}^{-1/2})^T = USV^T$$

I vettori colonna che appaiono in  $U$  e  $V$  rappresentano le direzioni principali della scomposizione, mentre i valori singolari, che appaiono in  $S$ , rappresentano i coseni degli angoli delle componenti di  $\mathcal{Y}_+$  e  $\mathcal{Y}_-$  rispetto a tali direzioni principali. E' possibile dunque esprimere l'aspettazione condizionata

$$\mathbb{E}[\mathcal{Y}_+ | \mathcal{Y}_-] = \Sigma_{+-} \Sigma_{--}^{-1} \mathcal{Y}_- = \Sigma_{+-} (\Sigma_{--}^{-1/2})^T \underbrace{\Sigma_{--}^{-1/2} \mathcal{Y}_-}_{\text{normalizz.}} = \mathcal{O}_k \hat{x}(k)$$

dove nell'ultimo passaggio si sfrutta il fatto che, per la proprietà di separazione, la proiezione delle uscite future sul passato, ovvero la loro miglior stima lineare, si ottiene applicando la matrice di osservabilità alla miglior stima dello stato all'istante  $k$ . Premoltiplicando per  $\Sigma_{++}^{-1/2}$  si ottiene

$$\Sigma_{++}^{-1/2} \Sigma_{+-} (\Sigma_{--}^{-1/2})^T \Sigma_{--}^{-1/2} \mathcal{Y}_- = \Sigma_{++}^{-1/2} \mathcal{O}_k \hat{x}(k)$$

La miglior stima di stato  $\hat{x}(k)$  si può dunque esprimere come combinazione lineare delle uscite precedenti:

$$\hat{x}(k) = \mathcal{C}_k \mathcal{Y}_- = \mathbb{E}[x(k) | y_0 \dots y_{k-1}].$$

Ora è possibile ricavare  $\mathcal{O}_k$  sfruttando che  $\Sigma_{+-} = \mathcal{O}_k \overline{\mathcal{O}_k}^T$ :

$$\Sigma_{++}^{-1/2} \Sigma_{+-} (\Sigma_{--}^{-1/2})^T = \Sigma_{++}^{-1/2} \mathcal{O}_k \overline{\mathcal{O}_k}^T (\Sigma_{--}^{-1/2})^T = USV^T = (US^{1/2})(S^{1/2}V^T)$$

da cui

$$\mathcal{O}_k = \Sigma_{++}^{1/2} U S^{1/2}.$$

Dalla relazione  $\mathbb{E}[\mathcal{Y}_+ | \mathcal{Y}_-] = \mathcal{O}_k \hat{x}(k)$  si ottiene la seguente espressione per la stima di stato:

$$\hat{x}(k) = \mathcal{O}_k^{-L} \mathbb{E}[\mathcal{Y}_+ | \mathcal{Y}_-] = S^{-1/2} U^T (\Sigma_{++}^{-1/2})^T \mathbb{E}[\mathcal{Y}_+ | \mathcal{Y}_-]$$

dove  $\mathcal{O}_k^{-L}$  indica l'inversa sinistra essendo la matrice non necessariamente quadrata. La particolare scelta per l'inversa sinistra di  $\mathcal{O}_k$  permette di rimuovere l'arbitrarietà della base dello spazio di stato. E' ora necessario ricavare anche la stima dello stato all'istante successivo.

$$\hat{x}(k+1) = \mathbb{E}[x(k+1) | y(0) \dots y(k+1)]$$

Si sceglie di mantenere invariata la dimensione del vettore relativo al futuro aggiungendo una misura, in modo da poter esprimere la nuova stima di stato sulla stessa base della stima precedente. Si ottiene quindi

$$\mathbb{E} \left[ \left[ \begin{array}{c} y(k+1) \\ \vdots \\ y(2k) \end{array} \right] \middle| \left[ \begin{array}{c} y(k) \\ \vdots \\ y(0) \end{array} \right] \right] = \mathcal{O}_k \hat{x}(k+1)$$

Il processo di stima di stato basata sulle misure passate è però esprimibile anche con le note equazioni relative al modello d'innovazione del filtro di Kalman

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A\hat{x}(k) + K(k)\hat{e}(k) \\ y(k) &= C\hat{x}(k) + \hat{e}(k) \end{aligned}$$

Proiettando le equazioni precedenti su  $\hat{x}(k)$  si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{x}(k+1)\hat{x}(k)^T] &= A\mathbb{E}[\hat{x}(k)\hat{x}(k)^T] \\ \mathbb{E}[y(k)\hat{x}(k)^T] &= C\mathbb{E}[\hat{x}(k)\hat{x}(k)^T] \end{aligned}$$

Tali relazioni possono essere invertite per ottenere la versione di  $A$  e  $C$  identificata dei dati, sostituendo opportunamente gli operatori di covarianza con le corrispondenti operazioni di varianza campionaria.

Considerando la matrice (A-KC) si nota che tanto più i poli sono vicini al cerchio di raggio unitario tanto più lento risulterà il sistema, quindi con un maggior transitorio. Considerando:

$$\overline{C}^T = \mathbb{E} \left[ x(k+1) y(k)^T \right] = APC^T + S, \quad P = \text{Var} \{x(k)\}$$

La matrice P deve soddisfare:

$$P = APA^T + Q \tag{17.1}$$

Considerando:

$$\text{Var} \{y(k)\} = \Lambda(0) - CPC^T \tag{17.2}$$

si ricava:

$$\begin{aligned} Q &= P - APA^T; \\ S &= \bar{C}^T - APC^T; \\ R &= \Lambda(0) - CPC^T. \end{aligned} \quad (17.3)$$

Allora

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P - APA^T & \bar{C}^T - APC^T \\ * & \Lambda(0) - CPC^T \end{bmatrix} \geq 0 \quad (17.4)$$

deve essere maggiore o uguale a zero. Considero la più piccola  $P_-$  che risolve LMI (Linear matrix inequality) tale che:

$$P = P^T > 0, \quad P_- : P \geq P_- \quad (17.5)$$

Ricordando che lo spettro di  $y$  si può scrivere:

$$S_y(z) = W(z)W^T\left(\frac{1}{z}\right)$$

Ritorniamo ora alla:

$$\mathbb{E}[y_+|y_-] = \Sigma_{+-}\Sigma_{--}^{-1}y_- \quad (17.6)$$

Si riconsiderino ora le

$$Y^- = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(N-1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(N) \\ \vdots & & & \vdots \\ y(k-1) & y(k) & \dots & y(k+N-2) \end{bmatrix} \quad Y^+ = \begin{bmatrix} y(k) & \dots & y(k+N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ y(2k-1) & \dots & y(2k+N-2) \end{bmatrix} \quad (17.7)$$

dove si è tornati a considerare il set di misure  $y(t)$ ,  $t \in [1, \dots, T]$  e non le variabili aleatorie  $\{y(i)\}$

Se ora si calcola

$$\mathbf{E}[Y_+|Y_-] \quad (17.8)$$

dove  $\mathbf{E}[\cdot]$  indica stavolta l'operatore di proiezione ortogonale (e non più l'aspettazione  $\mathbb{E}[\cdot]$  dato che si sta lavorando sulle misure) si ottiene

$$\mathbf{E}[Y_+|Y_-] = (Y_+Y_-^T)(Y_-Y_-^T)^{-1}Y_- \quad (17.9)$$

dalla quale normalizzando si ricava

$$\frac{1}{N}\mathbf{E}[Y_+|Y_-] = \underbrace{\frac{(Y_+Y_-^T)}{N}}_{\hat{\Sigma}_{+-}} \underbrace{\frac{(Y_-Y_-^T)^{-1}}{N}}_{\hat{\Sigma}_{--}^{-1}} Y_- \quad (17.10)$$

Si sono così ricavate le  $\hat{\Sigma}_{+-}$  e  $\hat{\Sigma}_{--}^{-1}$ , rispettivamente stima di covarianza e inversa della varianza che possono essere sostituite nella Eqn. (17.6).

Riepilogando, è dunque possibile individuare 3 passaggi fondamentali:

1. Sulla base dei dati si calcolano varianze e covarianze campionarie e si effettua la SVD

$$\Sigma_{++}^{-1/2} \Sigma_{+-} (\Sigma_{--}^{-1/2})^T = USV^T \quad (17.11)$$

2. Poichè si lavora con covarianze campionarie la matrice a primo membro della (17.11) avrà quasi certamente rango non pieno, pertanto si pone

$$USV^T \approx U_n S_n V_n^T \quad (17.12)$$

dove con  $U_n$  e  $V_n$  si sono indicate le matrici costituite rispettivamente dalle prime  $n$  colonne di  $U$  e dalle prime  $n$  righe di  $V^T$ , mentre  $S_n$  ha sulla diagonale principale  $n$  valori singolari non nulli.

3. Si ricavano a questo punto le stime dello stato agli istanti  $k$  e  $k + 1$  tramite le

$$\hat{X}_k = S_n^{-1/2} U_n^T (\Sigma_{++}^{-1/2})^T \mathbf{E}[Y_+ | Y_-] \quad (17.13)$$

$$\hat{X}_{k+1} = S_n^{-1/2} U_n^T (\Sigma_{++}^{-1/2})^T \mathbf{E}[Y_+ | Y_-] \quad (17.14)$$

dove però nella (17.14) è

$$\mathbf{E}[Y_+ | Y_-] = \mathbf{E} \left[ \left[ \begin{array}{c} Y_{k+1} \\ \vdots \\ Y_{2k} \end{array} \right] \middle| \left[ \begin{array}{c} Y_k \\ \vdots \\ Y_0 \end{array} \right] \right] \quad (17.15)$$

Infine è possibile ricavare tutte le matrici che caratterizzano il sistema identificato attraverso le relazioni

$$\hat{A} = (\hat{X}_{k+1} \hat{X}_k^T) (\hat{X}_k \hat{X}_k^T)^{-1} \quad (17.16)$$

$$\hat{C} = (\hat{Y}_k \hat{X}_k^T) (\hat{X}_k \hat{X}_k^T)^{-1} \quad (17.17)$$

$$\bar{C}^T = \frac{\hat{X}_{k+1} \hat{Y}_k^T}{N} \quad (17.18)$$

$$\hat{\Lambda}(0) = \frac{\hat{Y}_k \hat{Y}_k^T}{N} \quad (17.19)$$

Utilizzando LMI si ottengono poi  $\hat{K}$  e  $\hat{\Lambda} = \text{Var}\{e\}$ .  
Alternativamente si può scrivere

$$\hat{K}(k) = (\hat{X}_{k+1} \hat{E}_k^T) (\hat{E}_k \hat{E}_k^T)^{-\frac{1}{2}} \quad (17.20)$$