LabCont2: Laboratorio di Controlli 2	a.a. 2009-2010

Lezione 8 — 23 Marzo

Docente: Luca Schenato *Stesore: Baseggio Mauro, Bristot Francesca, Pozzi Mauro*

8.1 Luogo delle radici per sistemi SISO

Prendiamo nuovamente in considerazione il sistema introdotto nella lezione precedente:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

rappresentato dalla figura 8.1. Poniamo che l'ingresso esterno (sommato a u_c) sia $u_{ext} = 0$ con u scalare e $x \in \mathbb{R}^n$ e $K \in \mathbb{R}^{1\times n}$.

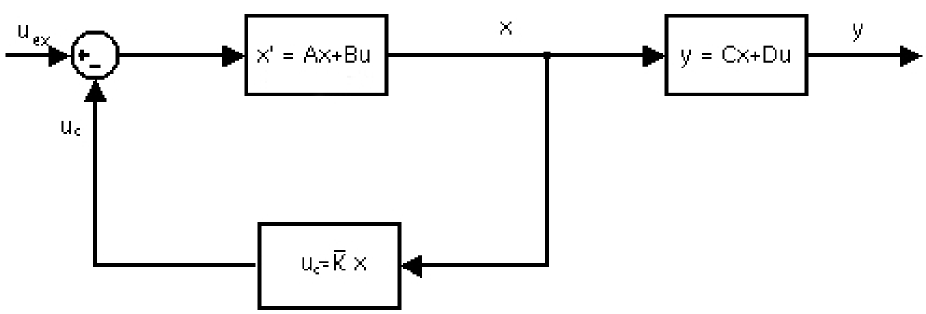

Figura 8.1. Schema a retroazione

Possiamo scrivere così la funzione di trasferimento del sistema originale che risulterà $P(s) = C(sI-A)^{-1}B$, mentre come già detto quella tra u e u_c risulterà $P_k(s) = K(sI-A)^{-1}B$. L'indice di costo da minimizzare viene preso in questo modo:

$$\int_0^\infty x^T Qx + u^T Ru\, dt = \int_0^\infty x^T C^T Cx + r \cdot u^2\, dt = \int_0^\infty y^2(t) + r \cdot u^2(t)\, dt$$

consideriamo anche valide le condizioni (A,B) stabilizzabile e (A, $Q^{1/2}$) -oppure nel nostro caso (A,C)- rivelabile. Cerchiamo gli autovalori di $A + BK$, il sistema in catena chiusa al variare del parametro r.

$$\Lambda(A + BK) = \{\lambda \in \Lambda(H) \text{ tale che } Re[\lambda] < 0\}$$

Per trovare i poli in catena chiusa devo trovare quindi gli autovalori di H:

$$H = \begin{bmatrix} A & -\frac{1}{r}BB^T \\ -C^TC & -A^T \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - H) = \det \begin{bmatrix} sI - A & \frac{1}{r}BB^T \\ C^TC & sI + A^T \end{bmatrix}$$

Per calcolare il determinante sfrutteremo le seguenti proprietà:

1. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$ se A e B sono quadrate
2. $\det \begin{bmatrix} M & N \\ S & V \end{bmatrix} = \det(M) \cdot \det(V - SM^{-1}N)$
3. $\mathrm{trace}(AB) = \mathrm{trace}(BA)$
4. $\det(aA) = a^n \det(A)$ se $a \in \mathbb{R}$
5. Sia E una matrice di rango uno, cioè $\mathrm{rank}(E) = 1$. Prendiamo $I + E = I + xy^T$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \Lambda(xy^T) &= \lambda_1 \neq 0 \text{ e } \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \\ \Lambda(I + xy^T) &= \{\lambda_1 + 1 \neq 0 \text{ e } \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1\} \\ \mathrm{trace}(E) &= \sum_i \lambda(E) = \lambda_1 = \mathrm{trace}(xy^T) = \mathrm{trace}(\underbrace{y^T x}_{\text{scalare}}) = y^T x \end{aligned}$$

$\Rightarrow \det(I + A) = 1 + \lambda_1 = 1 + \mathrm{trace}(A)$

Esposte le proprietà di cui ci serviremo nella dimostrazione andiamo a calcolare il determinante cercato, i numeri in basso tra parentesi indicheranno le proprietà usate di volta in volta.

$$
\begin{aligned}
\det(sI-H) \underbrace{=}_{(2)} & \det(sI-A)\det((sI+A^T-\frac{1}{r}C^T\underbrace{C(sI-A)^{-1}B}_{P(s)}B^T)) = \\
= & \det(sI-A)\det\left((sI+A^T)\left[I-\frac{P(s)}{r}(sI+A^T)^{-1}C^TB^T\right]\right) = \\
\underbrace{=}_{(1)} & \det(sI-A)\underbrace{\det(sI+A^T)}_{=\det(sI+A)}\det\left(I-\frac{(P(s)}{r}\underbrace{(sI+A^T)^{-1}C^TB^T}_{\text{rango}=1}\right) = \\
= & \det(sI-A)\det(sI+A)\left(1-\frac{P(s)}{r}\underbrace{\text{trace}\left((sI+A^T)^{-1}C^TB^T\right)}_{(5)}\right) = \\
= & \det(sI-A)\det(sI+A)\left(1-\frac{P(s)}{r}\underbrace{B^T(sI+A^T)^{-1}C^T}_{(3)}\right) = \\
= & \det(sI-A)\det(sI+A)\left(1-\frac{1}{r}P(s)C(sI+A)^{-1}B\right) = \\
= & \det(sI-A)(-1)^n\det(-sI-A)\left(1+\frac{1}{r}P(s)\underbrace{C(-sI-A)^{-1}B}_{P(-s)}\right) = \\
= & -\det(sI-A)\det(-sI-A)\left(1+\frac{1}{r}P(s)P(-s)\right) = \\
= & -d(s)d(s)\left(1+\frac{1}{r}\frac{n(s)}{d(s)}\frac{n(-s)}{d(-s)}\right)
\end{aligned}
$$

l'ultimo passaggio deriva dal fatto che $P(s)=\frac{n(s)}{d(s)}$ e $d(s)=\det(sI-A)$. Se ora imponiamo l'uguaglianza a zero troviamo le radici, vale a dire gli autovalori cercati.

$$d(s)d(-s)+\frac{1}{r}n(s)n(-s)=0$$

Possiamo riscrivere l'equazione in una forma riconducibile al luogo delle radici, in cui il parametro $k=\frac{1}{r}$ e $P(s)P(-s)=G(s)$.

$$1+\frac{1}{r}P(s)P(-s)=1+kG(s)=0$$

Esempio

Vediamo il comportamento di una funzione $P(s)=\frac{1}{s-\alpha}$ con $\alpha<0$.

Quando $r\to\infty$ ci troviamo sul polo a parte reale negativa, quando $r\to 0$ ci muoviamo lungo gli asintoti orizzontali.

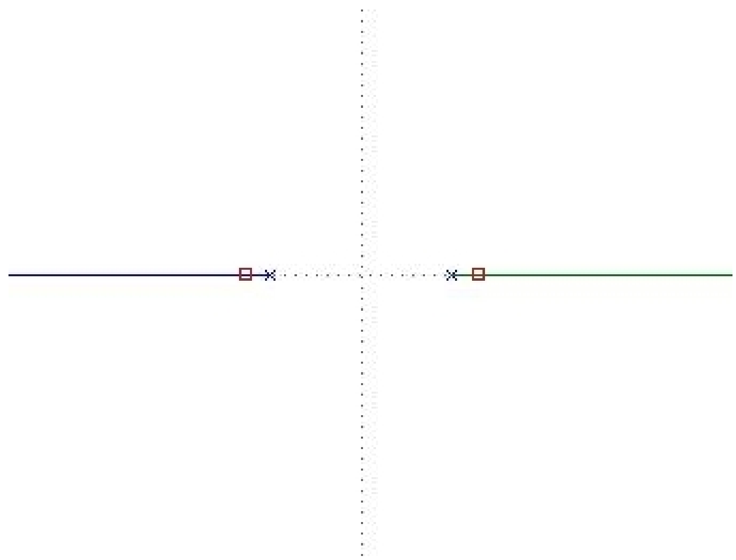

Figura 8.2. Luogo delle radici simmetrizzato

Se ora torniamo all'equazione $d(s)d(-s) + \frac{1}{r}n(s)n(-s) = 0$ possiamo studiare cosa accade per r che tende a infinito o a zero.

- $\mathbf{r} \to \infty$ in questo caso le radici di $\det(sI - H)$ coincidono con quelle di $d(s)d(-s)$
- $\mathbf{r} \to \mathbf{0}$ in questo caso le radici di $\det(sI - H)$ coincidono con quelle di $n(s)n(-s)$

Se ho uno zero a parte reale negativa il polo va posizionato sopra allo zero, se invece è a parte reale positiva il polo si pone sul simmetrico dello zero, che avrà parte reale negativa.

8.1.1 Asintoti

Se definiamo $n = \deg[d(s)]$ e $p = \deg[n(s)]$ il numero di asintoti che trovo sarà pari a $2(n-p)$ e la loro disposizione dipende dal fatto che (n-p) sia pari o dispari, vediamo quindi i 2 casi:

- (n-p) dispari: gli asintoti sono $\frac{\pi}{n-p}j$ con $j = 0, 1, \cdots, 2(n-p) - 1$
- (n-p) pari: gli asintoti sono $\frac{\pi}{n-p}(j + \frac{1}{2})$ con $j = 0, 1, \cdots, 2(n-p) - 1$

8.2 Esempi

- Funzione di trasferimento: $P(s) = \frac{1}{s^2}$ in Figura 8.3
  - Numero asintoti= $(n-p) = 2$
  - Posizione asintoti per $j = 0$: $\frac{\pi}{n-p}j + \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

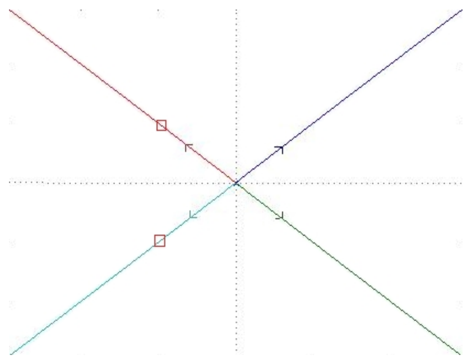

Figura 8.3. Luogo delle radici per un doppio integratore

- Funzione di trasferimento con due poli complessi con parte reale negativa e con uno zero a parte reale positiva: $P(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+4} = \frac{s+2}{(s-1+2j)(s-1-2j)}$ in Fig. 8.4

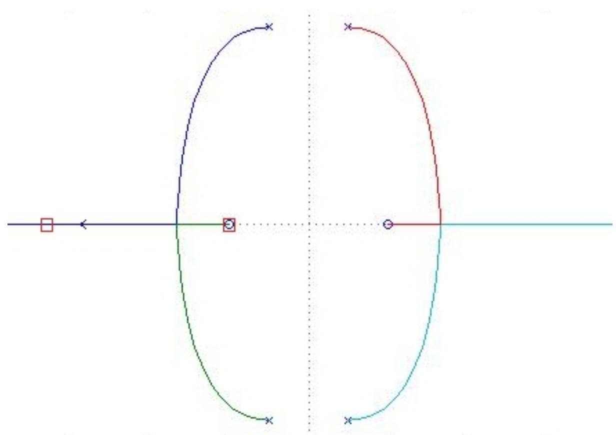

Figura 8.4. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc

- Funzione di trasferimento con due poli complessi con parte reale negativa: $P(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s-1+1j)(s-1-1j)}$ in Fig. 8.5.

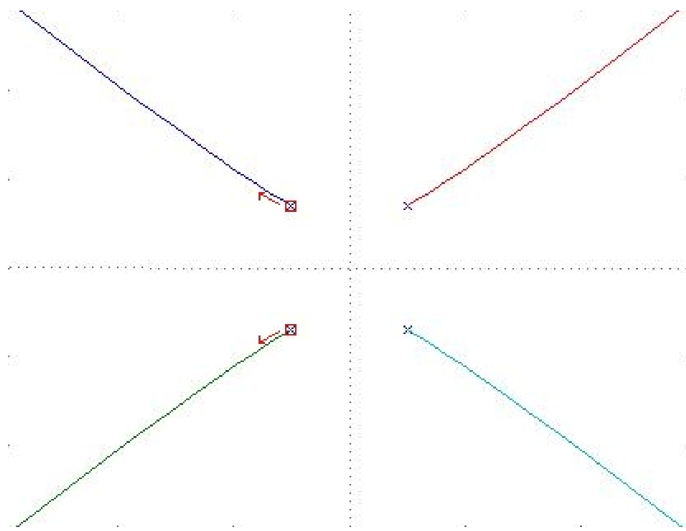

Figura 8.5. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc

- Funzione di trasferimento di un pendolo linearizzato nella posizione di equilibrio stabile: $P(s) = \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{(s-2j)(s+2j)}$ in Fig. 8.6.

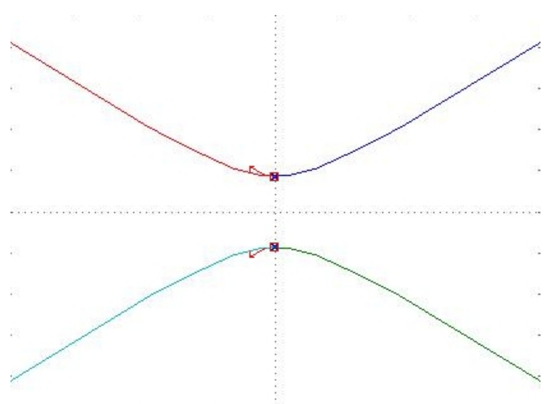

Figura 8.6. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc

- Funzione di trasferimento di un pendolo linearizzato nella posizione di equilibrio stabile $P(s) = \frac{1}{s^2-4}$ con due poli simmetrici, uno a parte reale positiva uno a parte reale negativa in Fig. 8.7.

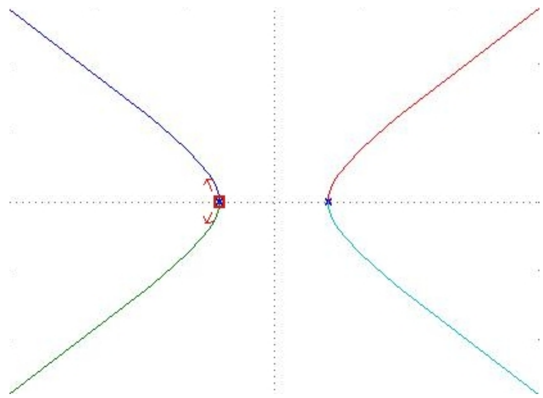

Figura 8.7. Luogo delle radici simmetrizzato, con un quadratino rosso sono indicati i poli da posizionare in cc