

Lezione 7 — 17 Marzo

Docente: Luca Schenato

Stesore: Baseggio Mauro, Bristot Francesca, Pozzi Mauro

7.1 Ripasso lezione precedente

- Equazione di Riccati:

$$-\dot{P} = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

con condizione finale $P(T, T) = Q_T$

- $V_0^*(x_0) = x_0^T P(0, T)x_0$
- $\lim_{(T-t) \rightarrow +\infty} P(t, T) = \lim_{T \rightarrow +\infty} P(0, T) = \bar{P} \geq 0$
- 1. Se (A, B) è stabilizzabile $\Rightarrow \bar{P} \leq M$, cioè \bar{P} limitata
- 2. Se $(A, Q^{1/2})$ è rivelabile \Rightarrow può esistere \bar{P}
ma con l'ingresso ottimo $u^*(t) = -R^{-1}B^T \bar{P}x(t)$ il sistema in catena chiusa può essere instabile

Se valgono le condizioni 1 e 2, H può essere scritta come:

$$H = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

con Λ_1 sottomatrice avente autovalori strettamente stabile e Λ_2 autovalori strettamente instabili (e opposti a quelli di Λ_1).

Vale inoltre che:

$$P(t, T) = g(e^{\Lambda_1(t-T)}, e^{\Lambda_2(t-T)}, Q_T, W)$$

con

$$\bar{P} = W_{21}W_{11}^T, \quad \forall Q_T$$

7.2 Stabilità della matrice F in catena chiusa

Proposizione 7.1. *Se la coppia (A,B) è stabilizzabile e se la coppia $(A,Q^{1/2})$ è rivelabile la matrice F del sistema in catena chiusa, ottenuta applicando la legge di controllo ottima $u^* = -R^{-1}B^T\bar{P}x$, è strettamente stabile.*

Dimostrazione: Notiamo preliminarmente che l'ipotesi di rivelabilità e stabilizzabilità garantiscono l'esistenza e l'unicità della matrice \bar{P} . Supponiamo per assurdo che esista λ autovalore di $F = A - BR^{-1}B^T\bar{P}$, matrice relative al sistema in catena chiusa, a parte reale non negativa, cioè $\text{Re}[\lambda] \geq 0$. A partire dall'equazione di Riccati soddisfatta a regime si verifica facilmente che:

$$F^T\bar{P} + \bar{P}F = -Q - \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}$$

Premoltiplicando per v^* e postmoltiplicando per v (con v autovettore di F relativo a $\bar{\lambda}$) si ottiene:

$$v^*F^T\bar{P}v + v^*\bar{P}Fv = -v^*Qv - v^*\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}v$$

Sfruttando il fatto che v è autovettore di F relativo $\bar{\lambda}$ diventa:

$$\lambda^*v^*\bar{P}v + v^*\bar{P}\lambda v = -v^*Qv - v^*\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}v$$

che raccogliendo opportunamente i termini risulta:

$$(\lambda^* + \lambda)v^*\bar{P}v = -v^*Qv - v^*\bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P}v$$

Ma la quantità a destra dell'uguale è senz'altro ≤ 0 ($Q \geq 0$, $R > 0$) mentre quella a sinistra dell'uguale è ≥ 0 ($\bar{P} \geq 0$) quindi affinché valga l'uguaglianza è necessario che entrambi i termini siano nulli e quindi in particolare:

$$\begin{cases} Qv = 0 \\ B^T\bar{P}v = 0 \end{cases}$$

Ma quindi:

$$Fv = (A - BR^{-1}B^T\bar{P})v = Av - BR^{-1}B^T\bar{P}v = Av = \lambda v$$

E a questo punto si conclude immediatamente con l'assurdo in quanto le due condizioni a cui siamo giunti:

$$\begin{cases} Qv = 0 \\ Av = \lambda v \end{cases}$$

significano che la coppia $(A,Q^{1/2})$ non è rivelabile in quanto esiste un autovalore instabile per A che appartiene al kernel di Q, contro l'ipotesi di partenza. \square

7.3 Autovalori della matrice F

Proposizione 7.2. *Gli autovalori della matrice F, ottenuta applicando la legge di controllo ottima $u^* = -R^{-1}B^T \bar{P}x$, sono quelli stabili della matrice H.*

Dimostrazione: Scegliamo T matrice di cambiamento di base del tipo:

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\bar{P} & I \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{P} & I \end{bmatrix}$$

Applicando il cambiamento di base alla matrice H (gli autovalori restano gli stessi) si ottiene:

$$\begin{aligned} THT^{-1} &= \begin{bmatrix} (A - BR^{-1}B^T\bar{P}) & -BR^{-1}B^T \\ -\bar{P}A - Q - A^T\bar{P} + \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} & -A^T + \bar{P}BR^{-1}B^T\bar{P} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -F^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in quanto in posizione (1,1) e (2,2) vi è proprio rispettivamente F e $-F^T$, mentre in posizione (2,1) vi è l'equazione di Riccati che è soddisfatta a regime da \bar{P} (con $\dot{\bar{P}} = 0$).

La matrice è triangolare superiore pertanto i suoi autovalori sono quelli dei blocchi diagonali ($F, -F^T$) quindi non solo si è dimostrato che gli autovalori di F sono quelli stabili di H , ma ancora una volta si rimarca il fatto che gli autovalori instabili di H sono esattamente l'opposto di quelli stabili. \square

7.4 Unicità della soluzione a regime dell'E.A.R

Proposizione 7.3. *Esiste un'unica matrice $\bar{P} \geq 0$ che soddisfa l'equazione di Riccati a regime*

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esistano due matrici \bar{P}_1, \bar{P}_2 che soddisfano l'equazione di Riccati, quindi:

$$F_1 = (A - BR^{-1}B^T\bar{P}_1) \quad \text{strettamente stabile}$$

$$F_2 = (A - BR^{-1}B^T\bar{P}_2) \quad \text{strettamente stabile}$$

Si dimostra facilmente che vale l'uguaglianza:

$$(\bar{P}_1 - \bar{P}_2)F_1 + F_2^T(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) = 0 \quad (7.1)$$

Infatti sostituendo a F_1 , F_2 rispettivamente $(A - BR^{-1}B^T\bar{P}_1)$ e $(A - BR^{-1}B^T\bar{P}_2)$ e svolgendo i conti si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 A - \bar{P}_1 B R^{-1} B^T \bar{P}_1 - \bar{P}_2 A + \bar{P}_2 B R^{-1} B^T \bar{P}_1 + A^T \bar{P}_1 - A^T \bar{P}_2 - \\ - \bar{P}_2 B R^{-1} B^T \bar{P}_1 + \bar{P}_2 B R^{-1} B^T \bar{P}_2 = 0 \end{aligned}$$

dove il termine $(-\bar{P}_2 B R^{-1} B^T \bar{P}_1)$ si semplifica con $(+\bar{P}_2 B R^{-1} B^T \bar{P}_1)$.
Sommando e sottraendo la matrice Q risulta:

$$(A^T \bar{P}_1 + \bar{P}_1 A + Q - \bar{P}_1 B R^{-1} B^T \bar{P}_1) - (A^T \bar{P}_2 + \bar{P}_2 A + Q - \bar{P}_2 B R^{-1} B^T \bar{P}_2) = 0$$

ed entrambi gli addendi sono nulli in quanto per ipotesi \bar{P}_1 , \bar{P}_2 soddisfano l'equazione di Riccati.

L'espressione 7.1 ha quindi la forma di un funzionale lineare del tipo:

$$\mathcal{L}(X) = X F_1 + F_2^T X = 0 \quad \text{con } X \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

che può essere riscritto anche come:

$$Mx = 0 \quad \text{con } x \in \mathbb{R}^{n^2} \tag{7.2}$$

con gli autovalori di M che sono quindi gli stessi del funzionale \mathcal{L} .

Posto $X = v_2 v_1^*$ (con v_1^* , v_2 rispettivamente autovettore sinistro di F_1 e destro di F_2^T) si osserva immediatamente che X è autovettore per \mathcal{L} relativo ad autovalore $(\lambda_1 + \lambda_2)$:

$$\mathcal{L}(v_2 v_1^*) = \lambda_1 v_2 v_1^* + \lambda_2 v_2 v_1^* = (\lambda_1 + \lambda_2) v_2 v_1^*$$

ma $\Re(\lambda_1 + \lambda_2) < 0$ (F_1 e F_2 per ipotesi sono strettamente stabili) quindi la matrice M non ha nessun autovalore in 0 (equivalentemente è a rango pieno e invertibile) e l'unica soluzione dell'equazione 7.2 è $x = 0$.

Questo si traduce nel funzionale \mathcal{L} nella condizione equivalente:

$$\mathcal{L}(X) = X F_1 + F_2^T X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = 0$$

che è proprio la tesi $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$ □

7.5 Luogo delle radici

Iniziamo ad analizzare dove si posizionano i poli in catena chiusa per un sistema SISO, single input single output:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ u = -\bar{K}x \end{cases}$$

in cui si ha $\bar{K} = R^{-1}B^T\bar{P}$.

Il sistema può essere così schematizzato:

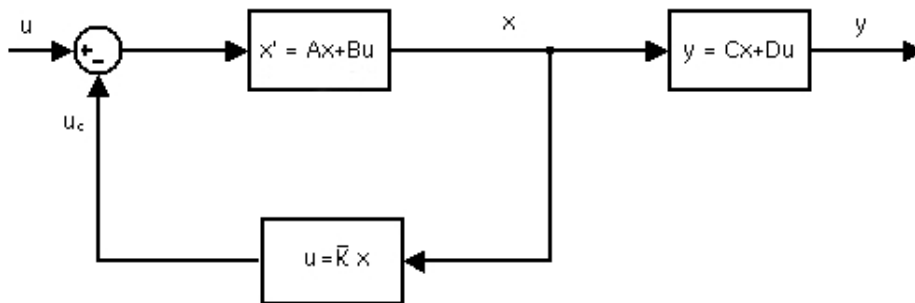


Figura 7.1. Schema a retroazione

Se consideriamo come ingresso u e come uscita u_c possiamo andare a calcolare la funzione di trasferimento che li lega che indicheremo con $P_k(s)$:

$$P_k(s) = -K(sI - A)^{-1}B = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$$

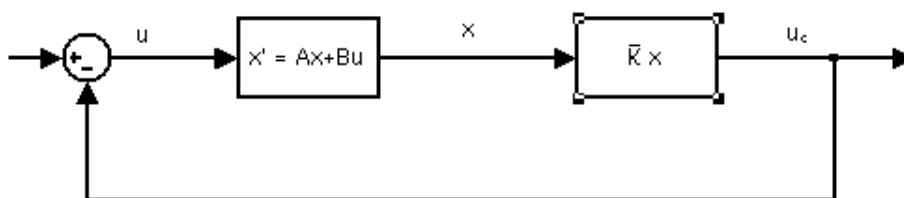


Figura 7.2. Schema f.d.t. tra u e u_c

E' possibile quindi definire la seguente funzione di costo:

$$J(u) = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u \, dt = \int_0^{\infty} y^2(t) + u^2(t) \, dt = \int_0^{\infty} x^T C^T C x + r \cdot u^2 \, dt \quad (7.3)$$

in cui per il sistema SISO in questione la matrice R è in realtà uno scalare (perciò lo si indicherà con r) e rappresenta il nostro grado di libertà per far variare l'indice:

$$\Rightarrow \quad r > 0 \quad \textit{parametro di progettazione}$$

La matrice H in questo caso diventa la seguente:

$$H = \begin{bmatrix} A & -1/r B B^T \\ -C^T C & -A^T \end{bmatrix}$$

e, come sottolineato più volte, i poli in catena chiusa sono gli autovalori stabili di H .

Nella prossima lezione si indagherà come varia la posizione di tali poli al variare del parametro di progettazione r .