LabCont2: Laboratorio di Controlli 2	a.a. 2009-2010
Lezione 6 — Marzo 10	
Docente: Luca Schenato	*Stesore: Edoardo D'Elia, Carlo Tavian*

6.1 Struttura della hamiltoniana

Affrontiamo ora una proprietà rilevante della matrice hamiltoniana che, come vedremo in seguito, sarà di notevole interesse anche nella risoluzione dell'equazione algebrica di Riccati.

Proposizione 6.1. *Se (A, B) è stabilizzabile e $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ è rivelabile, allora*

$$\mathbb{R}e(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \Lambda(H),$$

dove H è la matrice hamiltoniana.

***Dimostrazione*:** La prova di questo risultato è del tipo contronominale, in altri termini vedremo che se neghiamo la tesi, allora sarà negata anche l'ipotesi. Supponiamo che esista un vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T$ tale che

$$H\mathbf{v} = j\eta\mathbf{v}, \quad \eta \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} \neq 0.$$

Sia $\mathbf{w} := \begin{bmatrix} v_2 & v_1 \end{bmatrix}^T$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}^\dagger H\mathbf{v} = j\eta\mathbf{w}^\dagger\mathbf{v} = j\eta \begin{bmatrix} v_2^\star & v_1^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= j\, \underbrace{\eta(v_2^\star v_1 + v_1^\star v_2)}_{\text{reale}} \\
&= \begin{bmatrix} v_2^\star & v_1^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\
&= \underbrace{v_2^\star A v_1 - v_1^\star A^T v_2}_{\text{immaginario}} \underbrace{-v_2^\star BR^{-1}B^T v_2 - v_1^\star Q v_1}_{\leq 0},
\end{aligned}$$

ciò ha come evidente conseguenza che

$$\begin{cases} v_2^\star BR^{-1}B^T v_2 = 0, \quad \text{cioè} \quad R^{\frac{1}{2}}B^T v_2 = 0, \quad \text{ossia} \quad B^T v_2 = 0 \\ v_1^\star Q v_1 = 0, \quad \text{ovvero} \quad Q^{\frac{1}{2}} v_1 = 0. \end{cases}$$

Quindi risulta che

$$H\mathbf{v} = j\eta\mathbf{v} = \begin{bmatrix} Av_1 & -BR^{-1}B^T v_2 \\ -Qv_1 & -A^T v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Av_1 & 0 \\ 0 & -A^T v_2 \end{bmatrix},$$

in altre parole

$$\begin{cases} Av_1 = j\eta v_1 \\ A^T v_2 = -j\eta v_2. \end{cases} \tag{6.1}$$

D'altra parte abbiamo che

$$v_2^T \begin{bmatrix} -j\eta I - A & B \end{bmatrix} = 0, \quad \text{cioè} \quad \begin{bmatrix} -j\eta I - A^T \\ B^T \end{bmatrix} v_2 = 0.$$

Ciò significa che la coppia (A, B) è non stabilizzabile (criterio PBH). Analogamente risulta

$$\begin{bmatrix} j\eta I - A \\ C \end{bmatrix} v_1 = 0,$$

ergo la coppia $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ è non rivelabile ($C^T C = Q$). □

6.2 Soluzione dell'equazione di Riccati a regime

La soluzione dell'equazione algebrica di Riccati è fortemente legata alla matrice hamiltoniana ed alle sue proprietà. Vediamo ora come sia possibile determinarne una soluzione in forma chiusa in modo efficace.

Ricordando che

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix},$$

sia $W \in \mathbf{C}^{2n \times 2n}$ tale che

$$HW = W \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix},$$

dove Λ_1 raccoglie gli autovalori (strettamente) stabili e Λ_2 quelli (strettamente) instabili.

Risulta che

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} &= e^{H(t-T)} \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix} = W \exp\left\{ \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} (t-T) \right\} W^{-1} \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix} \\ &= W \begin{bmatrix} e^{\Lambda_1(t-T)} & 0 \\ 0 & e^{\Lambda_2(t-T)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} L = \begin{bmatrix} W_{11}e^{\Lambda_1(t-T)} & W_{12}e^{\Lambda_2(t-T)} \\ W_{21}e^{\Lambda_1(t-T)} & W_{22}e^{\Lambda_2(t-T)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ S \end{bmatrix} L, \end{aligned}$$

dove $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ è invertibile ed

$$S = -[W_{22} - Q_T W_{12}]^{-1}[W_{21} - Q_T W_{11}].$$

Pertanto

$$\begin{aligned} P(t,T) &= Y(t,T)X^{-1}(t,T) \\ &= [W_{21} + W_{22}e^{-\Lambda_2(T-t)}Se^{\Lambda_1(T-t)}][W_{11} + W_{12}e^{-\Lambda_2(T-t)}Se^{\Lambda_1(T-t)}]^{-1}, \end{aligned}$$

dunque

$$\lim_{T-t\to\infty} P(t,T) = \bar{P} = W_{21}W_{11}^{-1}.$$

Si noti che la soluzione a regime dipende *solo* dagli autovettori (generalizzati) stabili ed è indipendente dalla condizione finale Q_T.