| LabCont2: Laboratorio di Controlli 2 | a.a. 2009-2010 |
| --- | --- |

# Lezione 5 — Marzo 10

*Docente: Luca Schenato* *Stesore: Edoardo D'Elia, Carlo Tavian*

## 5.1 Soluzione dell'equazione di Riccati

Per determinare una soluzione dell'equazione di Riccati esiste un risultato che riduce il problema dal calcolo di un'equazione non lineare nell'incognita, di dimensione $n \times n$, alla risoluzione di un'equazione lineare di ordine $2n \times 2n$.

L'equazione differenziale di cui vogliamo trovare la soluzione è

$$\begin{cases} -\dot{P} = PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q, \qquad R > 0 \\ P(T) = Q_T. \end{cases} \tag{5.1}$$

È dimostrabile che $P(t,T)$ esiste per ogni $(t,T)$, inoltre nel seguito dimostreremo che

$$\lim_{(T-t)\to\infty} P(t,T) = P_\infty, \tag{5.2}$$

con $P_\infty$ particolare soluzione di 5.1.

Sia dato il sistema[1]

$$\begin{bmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} X(T) \\ Y(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix}, \tag{5.3}$$

dove $H$ è detta matriche hamiltoniana.

**Proposizione 5.1.** *La soluzione dell'equazione differenziale di Riccati è ottenibile nella forma $P(t) = Y(t)X^{-1}(t)$.*

***Dimostrazione*:** Si supponga di conoscere $P(t)$, abbiamo dunque che

$$X(t) = f(P(t)) \tag{5.4}$$

$$Y(t) = g(P(t)). \tag{5.5}$$

Dalle condizioni finali ricaviamo che

$$Y(t)X^{-1}(t)|_{t=T} = Q_T I^{-1} = Q_T. \tag{5.6}$$

[1] si noti che il sistema ha un certo numero di gradi di libertà dal momento che si potrebbe porre $X(T) = Z$ e $Y(T) = Q_T Z$, con $Z$ matrice $n \times n$ invertibile.

Posto che

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ \hat{u} = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)X(t), \end{cases} \tag{5.7}$$

si ha

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P(t))x(t). \tag{5.8}$$

La soluzione può essere riscritta come

$$x(t) = \Phi_1(t)x_0, \quad \text{dunque} \quad \dot{\Phi}_1(t) = (A - BR^{-1}B^T P(t))\Phi_1(t). \tag{5.9}$$

dove $\Phi_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sia $\Phi_2(t) := P(t)\Phi_1(t)$, risulta che

$$\dot{\Phi}_1(t) = A\Phi_1(t) - BR^{-1}B^T\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix}. \tag{5.10}$$

Come si verifica facilmente, la 5.10 è la prima equazione del sistema 5.3.

Deriviamo ora la funzione $\Phi_2(t)$ rispetto al tempo

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_2(t) &= \dot{P}(t)\Phi_1(t) + P(t)\dot{\Phi}_1(t) \\ &= -(PA + A^T P - PBR^-1B^T P + Q)\Phi_1(t) + P(t)(A - BR^-1B^T P)\Phi_1(t) \\ &= -A^T P(t)\Phi_1(t) - Q\Phi_1(t) \\ &= \begin{bmatrix} -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Anche qui si verifica facilmente che la 5.11 soddisfa la seconda equazione del sistema 5.3. Pertanto $\Phi_1(t) = X(t)$ e $\Phi_2(t) = Y(t)$.

Siano ora noti $X(t)$ e $Y(t)$. Vogliamo dimostrare che

$$P(t) = Y(t)X^{-1}(t). \tag{5.12}$$

Per come sono state definite $X(T)$ e $Y(T)$, abbiamo che $P(T) = Y(T)X^{-1}(T) = Q_T$. Sostituendo nell'equazione 5.1 la 5.12 otteniamo:

$$\begin{aligned} \dot{P} = \frac{d}{dt}(YX^{-1}) &= \dot{Y}X^{-1} + Y\dot{X}^{-1} \\ &= \dot{Y}X^{-1} - YX^{-1}\dot{X}X^{-1} \\ &= (-QX - A^TY)X^{-1} - YX^{-1}(AX - BR^{-1}B^TY)X^{-1} \\ &= -Q - A^T(YX^{-1}) - (YX^{-1})A + (YX^{-1})BR^{-1}B^T(YX^{-1}) \\ &= -Q - A^TP - PA + PBR^{-1}B^TP, \end{aligned} \tag{5.13}$$

dove è stata utilizzata l'uguaglianza

$$XX^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \dot{X}X^{-1} + X\dot{X}^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{X}^{-1} = -X^{-1}\dot{X}X^{-1}. \tag{5.14}$$

$\square$

Siano

$$\dot{\Phi}(t) = H\Phi(t), \qquad \Phi(T) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \Phi(t) \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}, \tag{5.15}$$

dunque

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} I \\ Q_T \end{bmatrix}, \qquad \Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t) & \Phi_{12}(t) \\ \Phi_{21}(t) & \Phi_{22}(t) \end{bmatrix}. \tag{5.16}$$

È facile vedere che è possibile risolvere l'equazione di Riccati in modo "indipendente" dalle condizioni finali

$$P(t) = [\Phi_{21}(t) + \Phi_{22}(t)Q_T][\Phi_{11}(t) + \Phi_{12}(t)Q_T]^{-1} = P(t, T). \tag{5.17}$$

## 5.2 Autovalori della matrice hamiltoniana

Al fine di mostrare una notevole proprietà dello spettro $\Lambda(H)$ della matrice hamiltoniana vediamo ora alcune caratteristiche strutturali ad essa associate.

**Proposizione 5.2.**

$$\textit{Se} \qquad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \qquad \textit{allora} \qquad JHJ = H^T.$$

***Dimostrazione*:**

$$JHJ = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -Q & -A^T \\ -A & BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T & -Q \\ -BR^{-1}B^T & -A \end{bmatrix} = H^T. \tag{5.18}$$

□

Sia ora $\mathbf{v}$ un autovettore di $H$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad H\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{con} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{C} \tag{5.19}$$

Definiamo $\mathbf{w}$ come

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

Dalla proposizione 5.2 si ha che

$$JHJ\mathbf{w} = H^T\mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad JH \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = H^T\mathbf{w} \quad \Rightarrow \quad \lambda J \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = H^T\mathbf{w}, \tag{5.21}$$

cioè

$$\lambda \begin{bmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{bmatrix} = H^T\mathbf{w} = -\lambda\mathbf{w}. \tag{5.22}$$

Possiamo quindi affermare che

**Proposizione 5.3.** *Se $\lambda$ è autovalore di $H$, allora anche $-\lambda$ è autovalore di $H$*

$$\lambda \in \Lambda(H) \quad \Rightarrow \quad -\lambda \in \Lambda(H).$$

D'altra parte si può facilmente notare che

$$\Lambda(JHJ) \equiv \Lambda(-JHJ^{-1}) \equiv -\Lambda(H) \equiv \Lambda(H^T) \equiv \Lambda(H).$$

Si osserva infine che tutti gli autovalori nell'origine devono necessariamente avere molteplicità pari.