

Lezione 2 — 2 Marzo

Docente: Luca Schenato Stesore: Riccardo Ghirardello, Fabio Paggiaro, Alberto Zugno

2.1 Progettazione in frequenza di un PID per giunto flessibile

Si consideri il consueto schema in retroazione con il sistema $P(s)$ preceduto dal controllore $C(s)$ come in Figura 2.3.

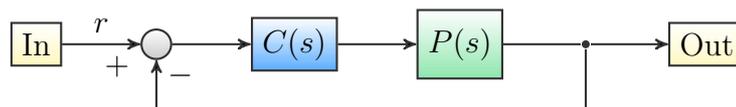


Figura 2.1. Schema in retroazione considerato.

Un controllore PID ha una funzione di trasferimento della forma

$$C(s) = K_P + K_D s + K_I/s \quad (2.1)$$

anche se, in fase realizzativa, la componente derivativa non è assunta $K_D s$ (perchè impropria) bensì $\frac{K_D s}{1 + T_L s}$, con T_L tale che il polo sia sufficientemente verso $-\infty$.

Dato che $s = j\omega$, la 2.1 si riscrive come

$$C(j\omega) = K_P + j\omega K_D + K_I/(j\omega) = \underbrace{K_P}_{\Re(C)} + j \underbrace{(\omega K_D - K_I/\omega)}_{\Im(C)}. \quad (2.2)$$

Dalle specifiche su t_a (tempo di salita) e S (sovraelongazione), si ricavano dei valori indicativi rispettivamente di frequenza di taglio ω_c e margine di fase ϕ_{MF} , che a posteriori possono essere modificati se le prestazioni non sono soddisfacenti. In particolare se il sistema non risulta abbastanza pronto si può aumentare ω_c , mentre per sistemare la sovraelongazione si può agire su ϕ_{MF} (di solito richiesto tra 30 e 60°).

Dalla definizione di ω_c e da quella di ϕ_{MF} , si hanno rispettivamente le condizioni

$$|P(j\omega_c)C(j\omega_c)| = 1 \quad (2.3)$$

$$\angle P(j\omega_c) + \angle C(j\omega_c) = -180^\circ + \phi_{MF} \quad (2.4)$$

quindi

$$|C(j\omega_c)| = 1/|P(j\omega_c)| \quad (2.5)$$

$$\angle C(j\omega_c) = -180^{circ} + \phi_{MF} - \angle P(j\omega_c). \quad (2.6)$$

Nota poi che $\Re(C) = |C| \cos \angle C$ e $\Im(C) = |C| \sin \angle C$, per quanto ottenuto nella 2.2, si hanno due equazioni nelle tre incognite K_P, K_D, K_I :

$$K_P = \frac{1}{|P(j\omega_c)|} \cos(-180^{circ} - \phi_{MF} + \angle P(j\omega_c)) \quad (2.7)$$

$$K_D\omega_c - K_I/\omega_c = \frac{1}{|P(j\omega_c)|} \sin(-180^{circ} - \phi_{MF} + \angle P(j\omega_c)) \triangleq a \quad (2.8)$$

dunque serve un vincolo ulteriore. Solitamente si pone $T_I = \alpha T_D$, dove $T_I = K_P/K_I$ e $T_D = K_D/K_P$, con α che soddisfa la condizione $4 < \alpha < 10$. Quindi complessivamente

$$K_D = \frac{K_P^2}{\alpha K_I} \quad (2.9)$$

che sostituito nella 2.8 porge

$$\frac{K_P^2}{\alpha K_I} \omega_c - \frac{K_I}{\omega_c} = a. \quad (2.10)$$

In definitiva i parametri su cui agire sono ω_c, ϕ_{MF}, T_L e α .

Per quanto riguarda un eventuale filtro notch da inserire in catena diretta, la cui forma si ricorda essere

$$F(s) = \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (2.11)$$

si pone solitamente $\omega_n \simeq \omega_c$ (volutamente un po' diverso per rappresentare il fatto che non è noto esattamente) e $\xi = 1$ (cioè filtro più selettivo; implica poli reali coincidenti; eventualmente si può diminuirlo un po').

Al posto di un controllore PID è anche possibile usare reti anticipatrici o altro, ma la progettazione risulterà probabilmente più complessa, dato che i PID hanno pochi semplici parametri su cui agire.

La funzione di trasferimento di un controllore PID è

$$C(s) = K_P + \frac{K_D s}{1 + T_L s} + \frac{K_I}{s} = K_P \left(\frac{T_D s}{1 + T_L s} + \frac{1}{T_I s} \right) \quad (2.12)$$

e dato che solitamente si ha $1/T_I \ll 1/T_D \ll 1/T_L$, si può approssimare come

$$C(s) = \frac{K_P(1 + T_I s)(1 + T_D s)}{s(1 + T_L s)} \quad (2.13)$$

dove si nota la presenza di due zeri, un polo nell'origine e un altro polo dovuto alla parte derivativa. Il relativo diagramma di Bode è in Figura 2.2 Si nota che non è conveniente avere un valore $1/T_D$ troppo basso perchè si peggiora il margine di fase. Analogamente non è conveniente per il margine di fase neppure avere un valore $1/T_I$ troppo alto, però nemmeno troppo basso perchè in tal modo l'azione integrale sarebbe debole, quindi scarsa reiezione ai disturbi in bassa frequenza.

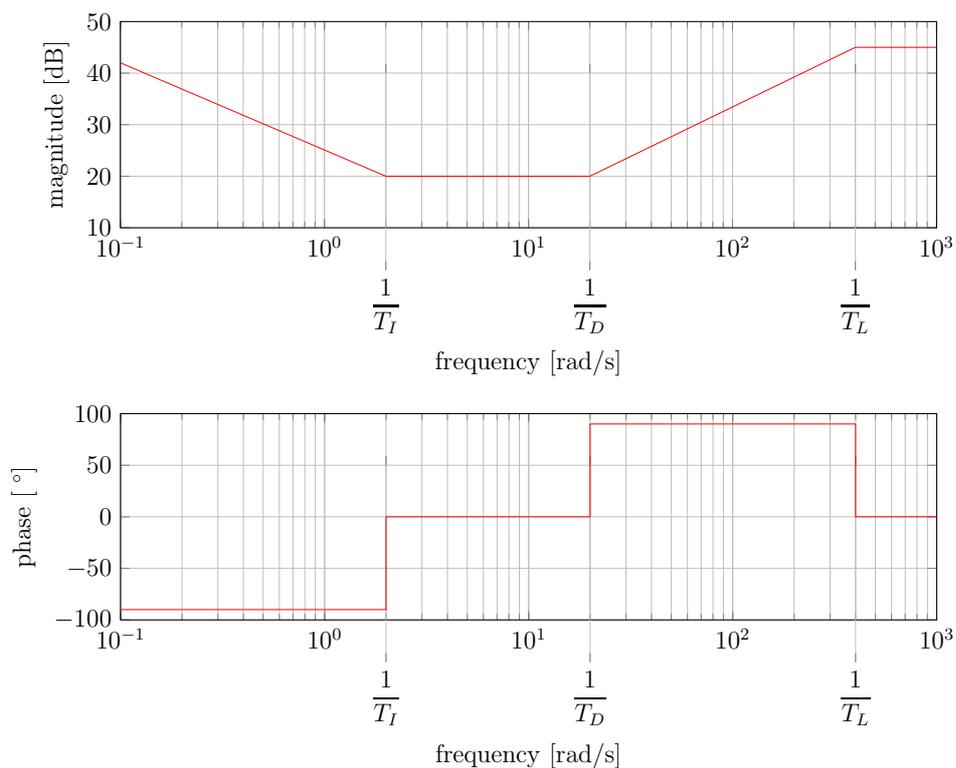


Figura 2.2. Diagrammi (asintotici) di Bode relativo a modulo e fase di $C(s)$.

Si ricorda che un comune criterio di scelta dei parametri è $T_I = \alpha T_D$, con $4 < \alpha < 10$ (α in pratica determina la distanza tra $1/T_I$ e $1/T_D$). Si consiglia di stabilire anche una relazione analoga anche tra $1/T_D$ e $1/T_L$ con un coefficiente β . Una volta scelti i valori dei parametri è opportuno vedere se il diagramma di Bode di $P(s)C(s)$ ha le caratteristiche desiderate.

Disturbi

Si consideri lo schema seguente in cui sono evidenziati i disturbi di ingresso e uscita (dovuti ad esempio al rumore nella scheda di acquisizione).

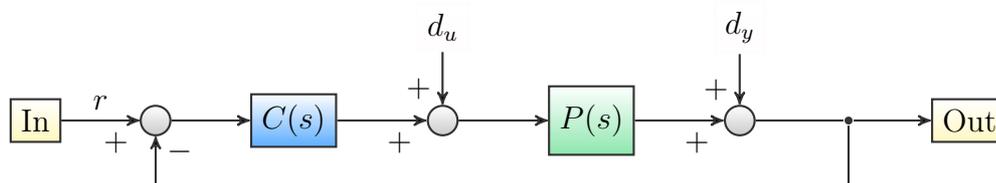


Figura 2.3. Schema con disturbi modellizzati

Si hanno le seguenti funzioni di trasferimento, che esprimono l'effetto sull'uscita di d_y , d_u e r , rispettivamente:

$$P_{yy}(s) = \frac{Y(s)}{D_y(s)} = \frac{1}{1 + P(s)C(s)} \quad (2.14)$$

$$P_{uy}(s) = \frac{Y(s)}{D_u(s)} = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (2.15)$$

$$P_{ry}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} \quad (2.16)$$

Il controllore C è volutamente progettato in modo che il sistema complessivo P_{ry} sia di tipo passa basso, ossia con modulo unitario e fase nulla in una certa banda (identificata approssimativamente da B) e caratteristica di attenuazione per frequenze superiori (vedi Figura 2.4). La pendenza del modulo in tale zona dipende dal sistema, di fatto è anche questo un possibile parametro di progettazione: può essere aumentata aggiungendo dei poli, magari per attenuare l'effetto di eventuali risonanze, cercando però di non posizionarli troppo vicini a B per non diminuire la banda.

Si analizzano ora le altre due fdt in funzione di questa.

- $$P_{yy}(s) = 1 - \frac{P(s)C(s)}{1 + P(s)C(s)} = 1 - P_{ry}(s). \quad (2.17)$$

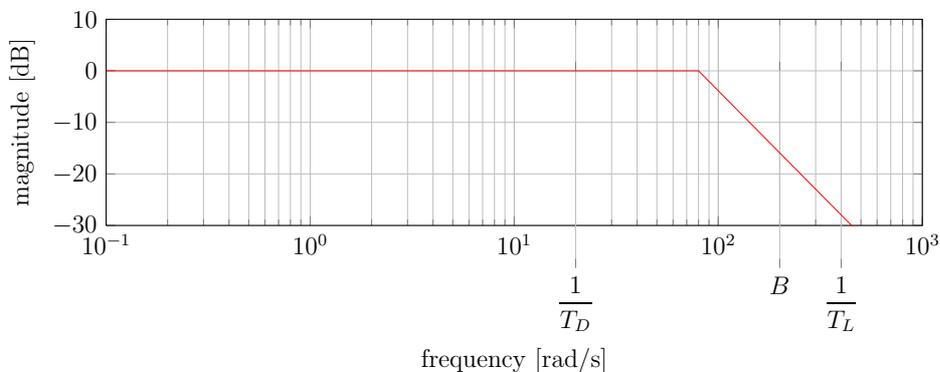


Figura 2.4. Diagramma (asintotico) di Bode relativi al modulo di $P_{ry}(s)$.

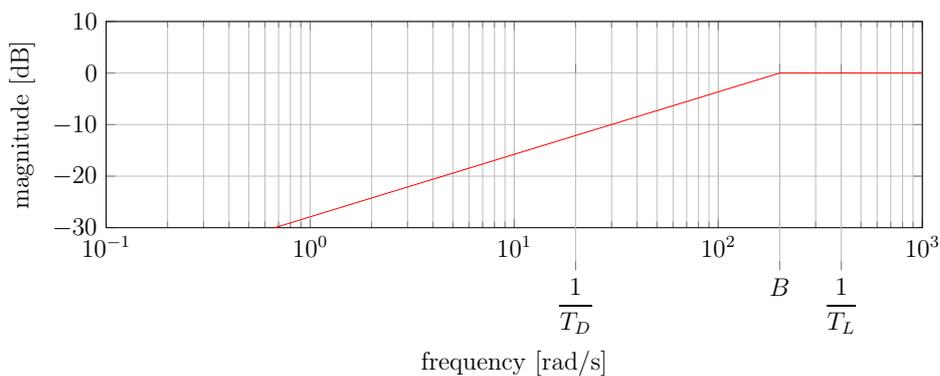


Figura 2.5. Diagramma (asintotico) di Bode relativi al modulo di $P_{yy}(s)$.

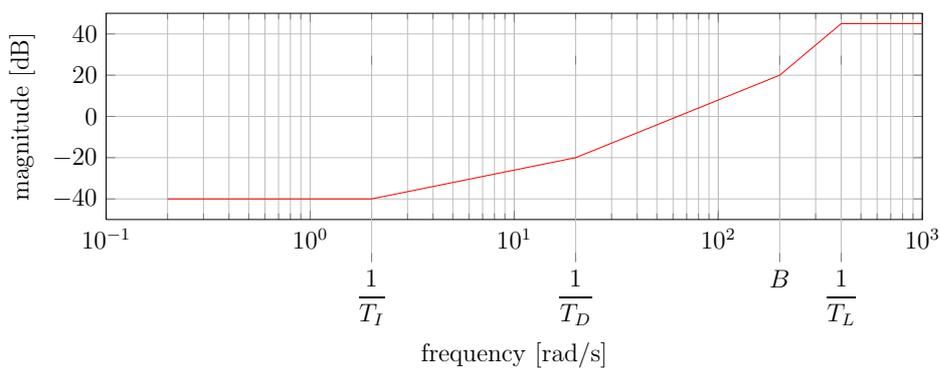


Figura 2.6. Diagramma (asintotico) di Bode relativi al modulo di $P_{uu}(s)$.

L'andamento indicativo del modulo è riportato in Figura 2.5. Si nota che a basse frequenze i disturbi in uscita sono attenuati, come si desidera. Le cose migliorano se si aumenta B .

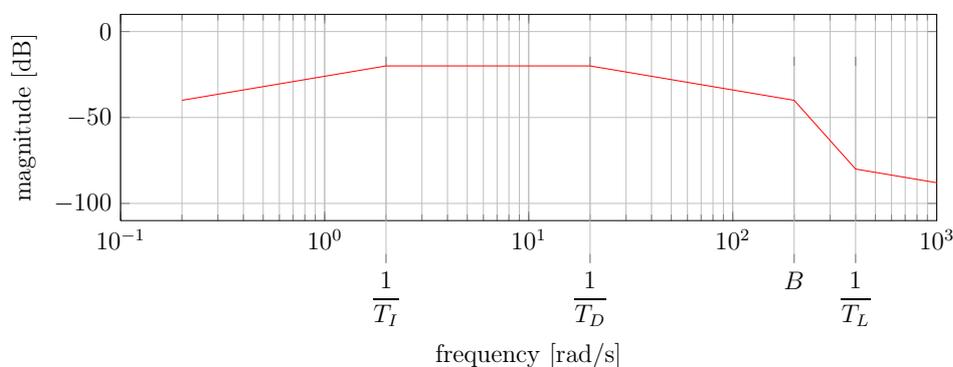


Figura 2.7. Diagramma (asintotico) di Bode relativi al modulo di $P_{yu}(s)$.

$$\bullet \quad P_{uy}(s) = \frac{P_{ry}(s)}{C(s)}. \quad (2.18)$$

L'andamento indicativo del modulo è riportato in Figura 2.6. Spostamento in verticale a parte (dato dal guadagno), dall'andamento si vede che tra 0 e $1/T_I$ anche i disturbi dall'ingresso all'uscita sono attenuati, e ancora di più quelli in alta frequenza. Va sottolineato che da questo punto di vista si vorrebbe un valore basso per $1/T_I$, il che è in contrasto con quanto osservato precedentemente; si deve quindi raggiungere un compromesso. Un ragionamento analogo può essere fatto per $1/T_L$: qui sembra utile spostarlo verso destra, ma si vedrà poco più avanti che ciò è in contrasto con qualcos'altro.

- Si può anche considerare l'effetto di d_y all'ingresso:

$$P_{yu}(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)} = C(s)(1 - P_{ry}(s)) \quad (2.19)$$

il cui andamento indicativo del modulo è riportato in Figura 2.7. Da qui si vede che un valore alto per $1/T_L$ porta a un'amplificazione del rumore d_y in ingresso. In particolare si ricorda che T_L è legato all'azione integrale, quindi, ad esempio, se il rumore è fortemente variabile, si hanno di conseguenza dei fastidiosi impulsi sul controllo.