| | |
|---|---|
| **LabCont2: Laboratorio di Controlli 2** | **a.a. 2009-2010** |

Lezione 1 — 1 Marzo

*Docente: Luca Schenato* *Stesore: Riccardo Ghirardello, Fabio Paggiaro, Alberto Zugno*

## 1.1 Modellizzazione del motore in corrente continua con giunto flessibile

Il modello del motore a corrente continua, presente in laboratorio, a cui viene applicato il giunto flessibile è riportato in Figura 1.1.

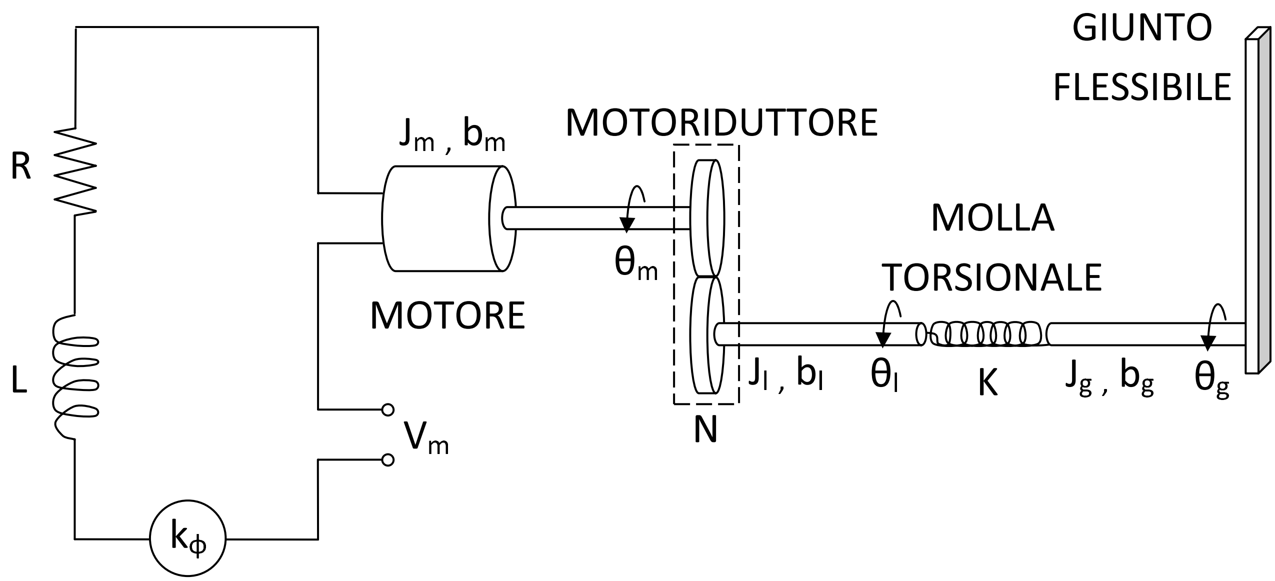



**Figura 1.1.** Schema motore c.c. con giunto flessibile.

Lista dei parametri:

$R$ = resistenza avvolgimento elettrico
$L$ = induttanza avvolgimento elettrico
$J_m, J_l, J_g$ = momenti d'inerzia
$b_m, b_l, b_g$ = coefficienti d'attrito
$k_\phi$ = costante di coppia
$K$ = costante elastica
$N$ = rapporto di trasmissione

Lista delle variabili:

$\theta_m$ = angolo motore
$\theta_l$ = angolo carico
$\theta_g$ = angolo giunto
$V_m$ = tensione di alimentazione

Di tali variabili si prendono come ingressi $V_m$ e come uscite gli angoli di uscita del motore $\theta_m$ e del giunto flessibile $\theta_g$.
Dalle equazioni meccaniche[1] che legano i parametri, al fine di inglobare nel modello anche il motoriduttore con le sue specifiche formule, si andranno a calcolare le relazioni tra le uscite e l'ingresso in tensione del motore introducendo dei valori dei coefficienti di attrito e di inerzia equivalenti (rispettivamente $b_{eq}$ e $J_{eq}$):

$$\Theta_l(s) = P_l(s)Vm(s) \qquad \text{e} \qquad \Theta_g(s) = P_g(s)Vm(s)$$

Riscrivendo le equazioni con opportuni passaggi si trovano le seguenti funzioni di trasferimento:

$$P_l(s) = \frac{k_{\phi,eq}\left(J_g s^2 + b_g s + K\right)}{Rs\left(J_g J_{eq} s^3 + \left[\left(b_{eq} + \frac{k_{\phi,eq}^2}{R}\right)J_g + J_{eq} b_g\right]s^2 + \left[(J_g + J_{eq})K + b_g\left(b_{eq} + \frac{k_{\phi,eq}^2}{R}\right)\right]s + K\left[b_g + b_{eq} + \frac{k_{\phi,eq}^2}{R}\right]\right)} \tag{1.1}$$

$$P_g(s) = \frac{k_{\phi,eq}K}{Rs\left(J_g J_{eq} s^3 + \left[\left(b_{eq} + \frac{k_{\phi,eq}^2}{R}\right)J_g + J_{eq} b_g\right]s^2 + \left[(J_g + J_{eq})K + b_g\left(b_{eq} + \frac{k_{\phi,eq}^2}{R}\right)\right]s + K\left[b_g + b_{eq} + \frac{k_{\phi,eq}^2}{R}\right]\right)} \tag{1.2}$$

Nel caso specifico considerato in laboratorio i parametri assumono i seguenti valori:

$$\begin{array}{lll}
R = 2.6\ [\Omega] & L \approx 0\ [H] & N = 14 \\
k_\phi = 7.67 \cdot 10^{-3}\ [\frac{N \cdot m}{A}] & k_{\phi,eq} = N \cdot k_\phi & J_{eq} = 2.1 \cdot 10^{-3}\ [Kg \cdot m^2] \\
b_{eq} \approx 0 & J_g = 2.1 \cdot 10^{-3}\ [Kg \cdot m^2] & b_g \approx 2.1 \cdot 10^{-3}\ [\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}] \\
K \approx 1.2\ [\frac{N \cdot m}{rad}] & &
\end{array}$$

Quindi le funzioni di trasferimento (1.1) e (1.2), calcolate con i valori sopra riportati, diventano rispettivamente:

$$P_l(s) = \frac{20\left(s^2 + 1.43s + 571\right)}{s(s^3 + 3.5s^2 + 1145s + 2023)} \tag{1.3}$$

$$P_g(s) = \frac{11238}{s(s^3 + 3.5s^2 + 1145s + 2023)}. \tag{1.4}$$

È necessario, al fine della progettazione di un controllore, conoscere in maniera esaustiva le f.d.t che si hanno a disposizione. Si inizia con l'analizzare, per ciascuna delle due f.d.t (1.3) e (1.4), la collocazione dei poli sul piano complesso e i luoghi delle radici (Figure 1.2 e 1.3) e i diagrammi di Bode, relativi a modulo e fase, in frequenza (Figure 1.4 e 1.5).

[1] Per la visione dei passaggi formali, necessari per poter calcolare le f.d.t., si rimanda alla guida consultabile al link http://automatica.dei.unipd.it/tl_files/utenti/lucaschenato/Classes/LabContr2/GuidaLabCont2.pdf

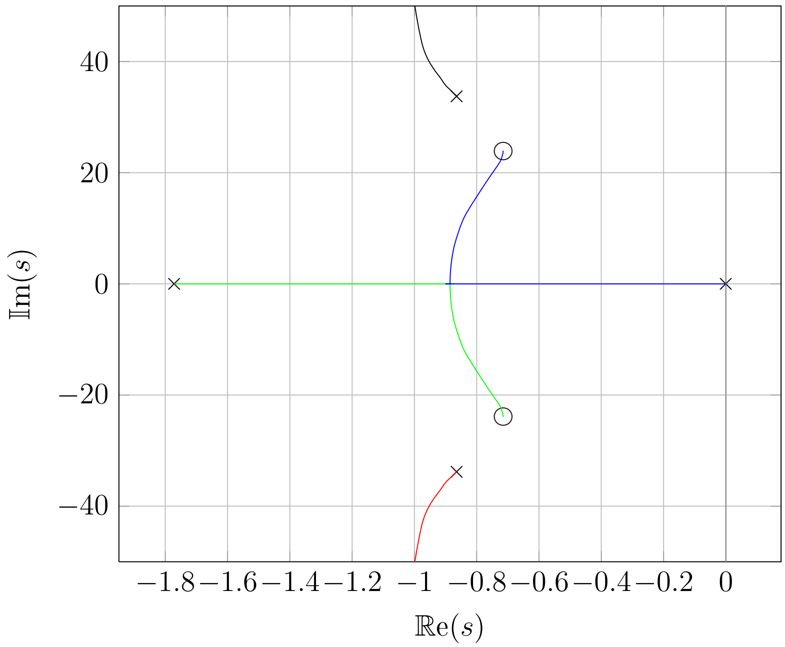



**Figura 1.2.** Luogo delle radici relativo a $P_l(s)$.

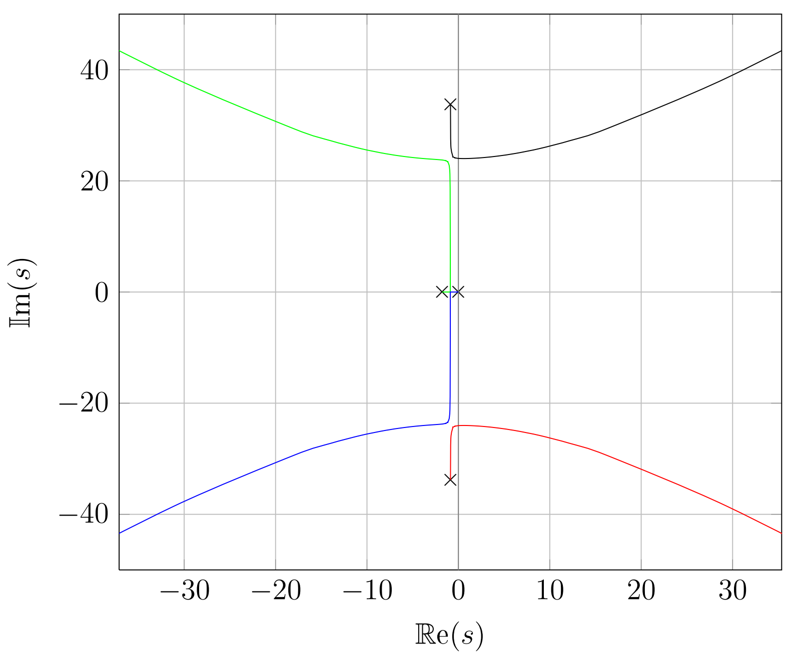



**Figura 1.3.** Luogo delle radici relativo a $P_g(s)$.

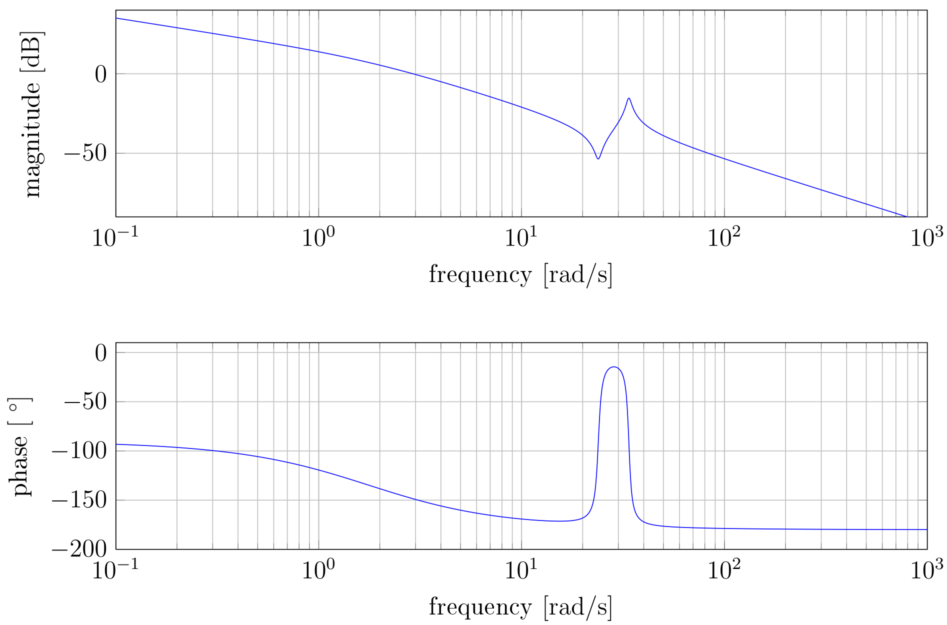



**Figura 1.4.** Diagrammi di Bode relativi a modulo e fase di $P_l(s)$.

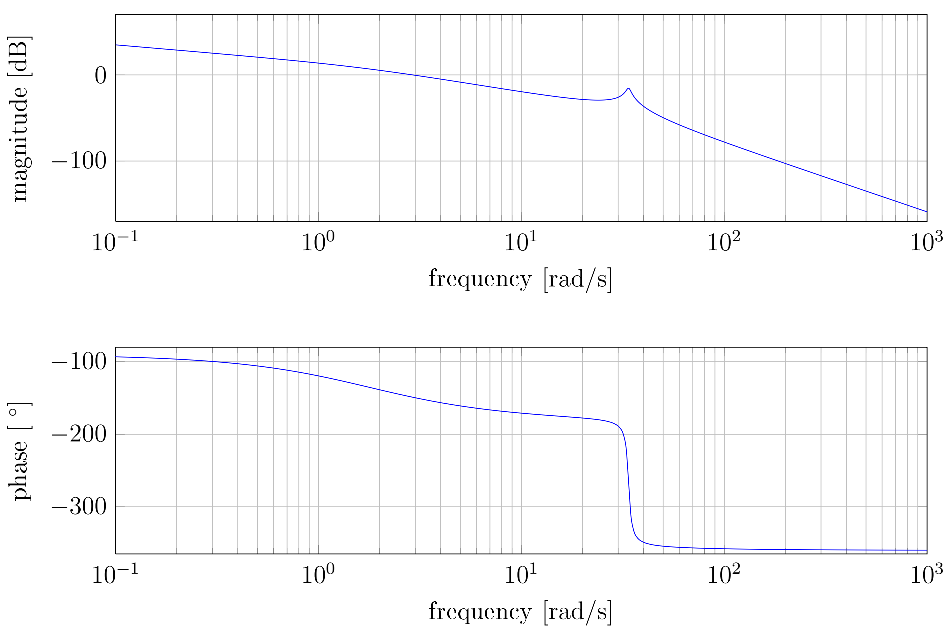



**Figura 1.5.** Diagrammi di Bode relativi a modulo e fase di $P_g(s)$.

## 1.2 Specifiche di progettazione

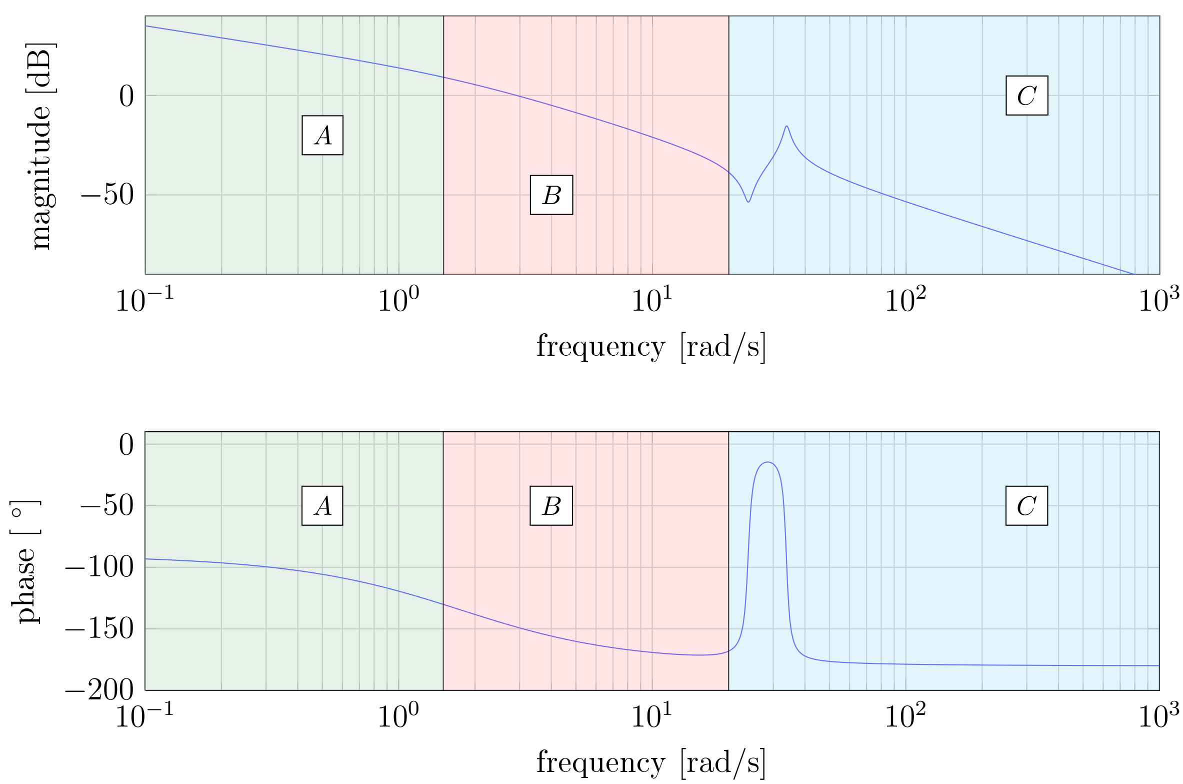
Date delle specifiche come il tempo di salita $t_s$ [sec] o il tempo di assestamento $t_a$ [sec], si può ricavare la frequenza di taglio $\omega_c$ [Hz] nominale del sistema da progettare; da una sovraelongazione $S$ [rad] richiesta si ricava il margine di fase $\phi_{MF}$ [rad] nominale.

$$\omega_c = 1.8/t_s \tag{1.5}$$

$$\phi_{MF} = 2\left|\frac{\ln(S)/\pi}{\sqrt{1+(\ln(S)/\pi)^2}}\right| = 2\sin\left[\operatorname{atan}(-\ln(S)/\pi)\right] \tag{1.6}$$

Come è noto dal corso di Laboratorio di Controlli 1, un controllo derivativo aggiunge fase (fino ad un massimo di 90 °), mentre un controllo integrativo ne toglie. Il controllo si potrebbe fare con reti anticipatrici o altre tecniche, si tende però ad usare PID essendo lo *standard de facto*.

**Sistema co-locato $P_l(s)$** Un sistema si dice co-locato se non esistono elementi di accumulo di energia all'interno dell'anello di controllo.
Nel caso specifico del sistema colocato $P_l(s)$, si può dividere il diagramma di bode in tre parti:



A seconda del dominio di lavoro si hanno varie combinazioni ottime per il controllo del processo:

| Zona del diagramma di Bode | | |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ |
| P | PD | PD |
| PI | PID | PID+Notch filter |

Nella zoa $C$ si vuole usare un filtro notch per attenuare la frequenza del polo, la frequenza di risonanza del sistema.

Se si vuole attenuare una certa frequenza $\omega_n$, si usa un filtro notch in serie con il processo, con trasformata

$$F(s) = \frac{s^2 + \omega_z^2}{s^2 + 2\omega_p \xi s + \omega_p^2} \tag{1.7}$$

ove tipicamente si progetta $\omega_z = \omega_p = \omega_n$. Inserendo il filtro, si toglie un po' di margine di fase prima di $\omega_p$. Si deve tener conto se è il sistema in serie con il processo sia a fase minima o meno.

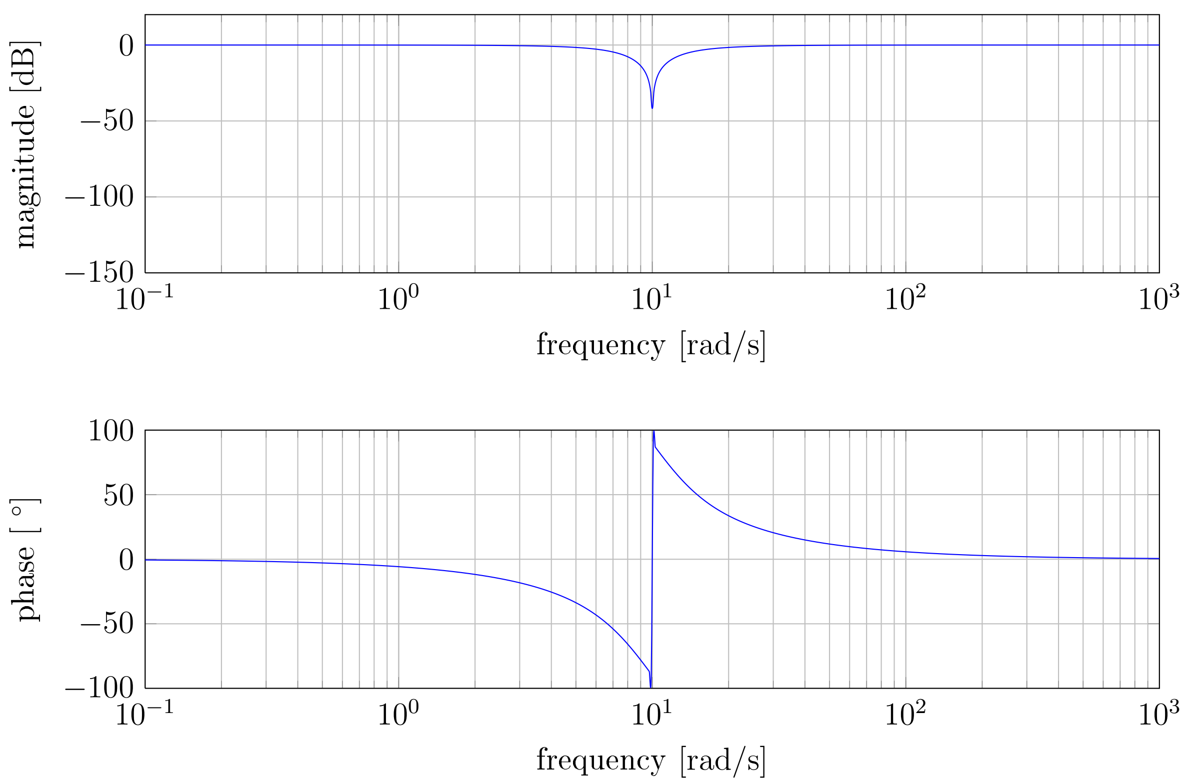
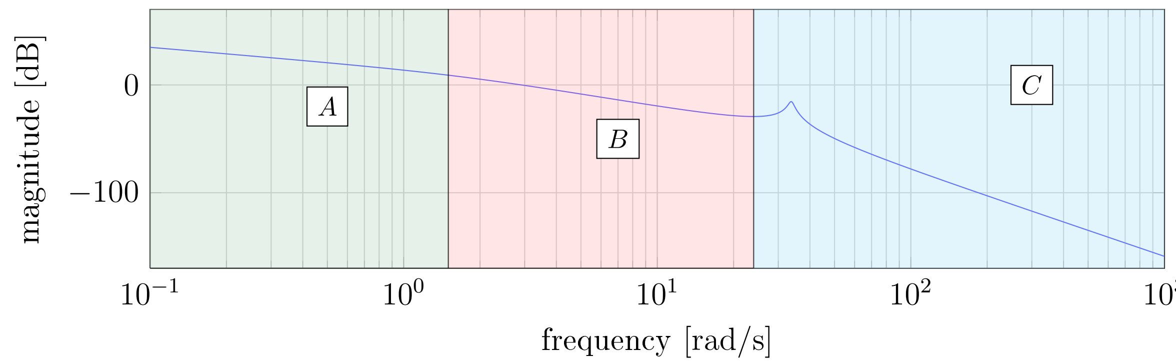
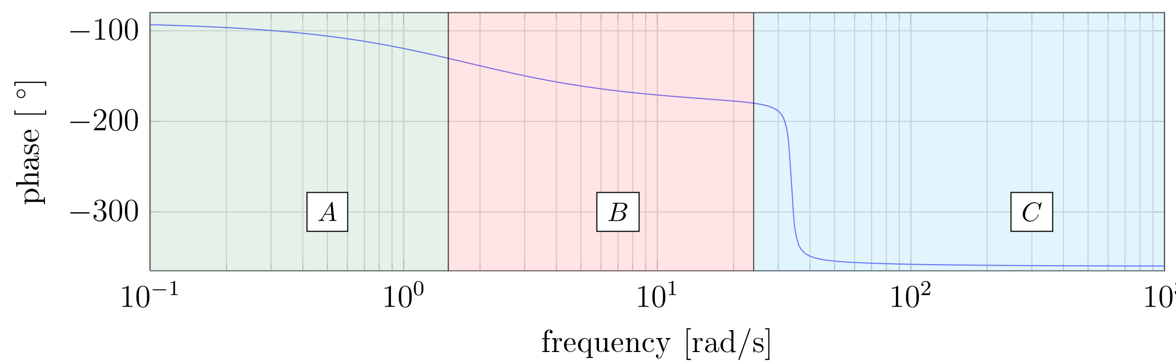



**Figura 1.6.** Diagrammi di Bode di un filtro notch

**Sistema non co-locato** $P_g(s)$ Se il sistema non è co-locato, come il processo $P_g(s)$, risulta più difficile da controllare, essendo presenti elementi di accumulo di energia. Si possono dividere le zone del diagramma di Bode in più parti:




Nella zona $C$ non è possibile alcun controllo integrativo o tramite uso di filtri notch, dato che la fase è molto inferiore a 90° (attorno ai −360°) mentre il controllo derivativo aggiunge al massimo 90°.

| Zona del diagramma di Bode | | |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ |
| P | PD | PD |
| PI | PID | × |

Il margine di fase è la fase del punto che attraversa il cerchio più vicino a $-1$ nel diagramma di Nyquist. Nei diagrammi di Bode la curva del modulo potrebbe intersecare in più punti l'asse a 0 dB, ci potrebbero essere quindi più attraversamenti del cerchio di raggio unitario in Nyquist. La frequenza di taglio ed il relativo margine di fase alla $\omega_c$ viene assegnato al punto di attraversamento più vicino a $-1$. Un filtro passa-basso in catena chiusa avrebbe una risonanza dopo la frequenza di taglio, ma se il polo del filtro è sufficientemente negativo gli effetti dell'attrito potrebbbero essere comunque trascurabili.

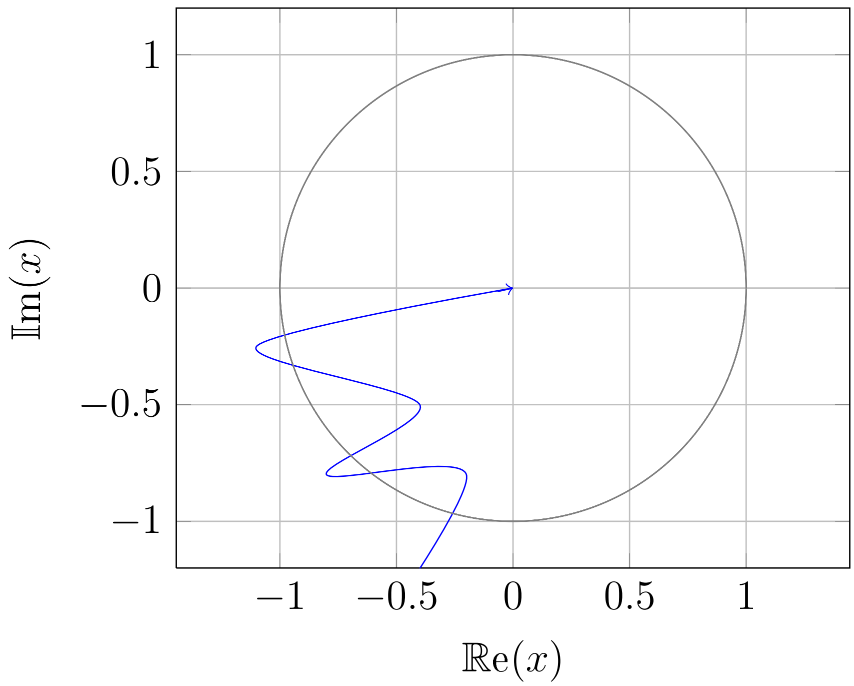



**Figura 1.7.** Diagramma di Nyquist di una funzione di trasferimento con più attraversamenti sul cerchio di raggio unitario