Note sulla trasformata discreta di Fourier

Alessandro Chiuso

18 gennaio 2011

1 Introduzione

Lo scopo di queste note è quello di introdurre la trasformata discreta di Fourier (DFT, *Discrete Fourier Tranform*), cioè l'equivalente della serie di Fourier per segnali a tempo discreto e descrivere il suo utilizzo per il calcolo numerico della trasformata di Fourier di segnali a tempo continuo

Il successo di questo strumento è in buona parte dovuto all'esistenza di un algoritmo, noto come FFT (*Fast Fourier Transform, i.e. trasformata veloce di Fourier*), che permette di calcolare la DFT in maniera veloce. L'algoritmo di FFT viene normalmente attribuito a Cooley e Tuckey [1]. Di fatto questo algoritmo venne scoperto (ed usato) da Gauss nel XIX secolo [2]. Pare che in realtà l'algoritmo sia stato riscoperto ed utilizzato varie volte (anche prima del lavoro di Cooley e Tuckey menzionato sopra).

Grazie alla FFT, infatti, è possibile implementare al calcolatore operazioni nel dominio della frequenza, cioè utilizzando le trasformate di Fourier, con complessità di calcolo inferiore a quella ottenibile implementando lo stesso calcolo nel dominio del tempo. Per questo motivo la FFT viene utilizzata sostanzialmente in tutti i campi applicativi che fanno uso dell'elaborazione numerica dei segnali.

2 La trasformata Discreta di Fourier (DFT)

Si consideri un segnale $v(k)$ a tempo discreto (i.e. $k \in \mathbb{Z}$) e periodico di periodo N, cioè tale che $v(k+N) = v(k)$, $\forall k$. Come già accennato durante il corso è possibile pensare a $v(k)$ come ai campioni ottenuti da un segnale tempo continuo $v_a(t)$ campionato ad istanti $t = kT_c$, cioè $v(k) = v_a(kT_c)$.

Il nostro scopo è di mostrare che il segnale $v(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, si può scrivere come sovrapposizione finita di "fasori" a tempo discreto

$$v(k) = \sum_{h=0}^{N-1} V_h \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}hk}$$

dove i "coefficienti di Fourier" V_h si possono ottenere dalla relazione:

$$V_h = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) \mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}hk}.$$

Il segnale $V(h) = V_{h \bmod N}$, $h \in \mathbb{Z}$ prende il nome di *Trasformata Discreta di Fourier* del segnale $v(k)$.

Per prima cosa si osservi (suggerimento del prof. Stefano Pinzoni) che un segnale a tempo discreto di periodo N si può pensare come soluzione dell'equazione alle differenze omogenea

$$v(k) - v(k-N) = 0 \tag{1}$$

Di conseguenza, come noto dalla teoria, al variare delle condizioni iniziali $v(0), .., v(N-1)$, il segnale $v(k)$ è esprimibile come combinazione lineare a coefficienti costanti dei "modi" del sistema (1). L'equazione caratteristica associata ad (1) è

$$z^N - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono le radici N-esime dell'unità, i.e.

$$\lambda_h = \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}h} \quad h = 0, 1, .., N-1.$$

Ne consegue che il segnale $v(k)$, al variare delle condizioni iniziali $v(0), .., v(N-1)$, si può esprimere nella forma

$$v(k) = \sum_{h=0}^{N-1} V_h \lambda_h^k = \sum_{h=0}^{N-1} V_h \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}hk} \tag{2}$$

Rimangono a questo punto da determinare i coefficienti V_h nella (2).

Utilizzando la formula per la somma dei primi N termini di una serie geometrica di ragione q:

$$\sum_{i=0}^{N-1} q^i = \frac{1-q^N}{1-q}$$

si ottiene la relazione:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}hk}\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} = \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}(h-\ell)k} = \begin{cases} N & h = \ell + nN \ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1-\mathrm{e}^{j2\pi(h-\ell)}}{1-\mathrm{e}^{j\frac{2\pi}{N}(h-\ell)}} = 0 & h \neq \ell + nN \ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Grazie a questa osservazione, si vede che, moltiplicando la (2) per $\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k}$ e sommando su $k = 0, .., N-1$, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{N-1} v(k)\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}\ell k} = NV_\ell$$

da cui immediatamente, sostituendo l'indice h all'indice ℓ,

$$V_h = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} v(k)\mathrm{e}^{-j\frac{2\pi}{N}hk} \tag{3}$$

L'equazione (3) permette di ottenere i coefficienti della trasformata a partire dal segnale e, come per la trasformata di Fourier, viene chiamata equazione di *analisi.* In maniera simmetrica l'equazione (2) permette di "sintetizzare" il segnale a partire dai valori della trasformata e perciò viene chiamata equazione di *sintesi.*

Si è visto quindi che un segnale periodico a tempo discreto si può rappresentare come sovrapposizione di un numero *finito* N, pari al numero di campioni in un periodo, di esponenziali complessi. Si ricordi che, per i segnali periodici a tempo continuo, sono necessari un numero infinito (seppur numerabile) di esponenziali complessi (la serie di Fourier). Questo si può in un certo senso intuire notando che, fissata la durata (in secondi) di un periodo T del segnale $v_a(t)$, e pensando $v(k) = v_a(kT_c)$, sono necessari $N = T/T_c$ campioni per periodo. Quando T_c tende a zero, N tende ad infinito mostrando che, riducendo il passo di campionamento T_c, sono necessari un numero crescente di “fasori” per rappresentare il segnale.

Come risultato dell'analisi si è ottenuto che la trasformata discreta di Fourier di un segnale a tempo discreto di periodo N è anch'essa un segnale a tempo discreto di periodo N. Senza perdita di generalità molto spesso di fa riferimento solamente ad un periodo del segnale (e della trasformata) pensando che siano sequenze *finite* definite nell'intervallo $k = 0, .., N-1$.

Tuttavia, come vedremo nel seguito, risulta particolarmente utile pensare al segnale ed alla trasformata come segnali periodici.

3 Complessità di calcolo ed FFT

Il calcolo della trasformata discreta di Fourier (equazione di analisi (3)) richiede l'esecuzione di N moltiplicazioni ed N somme (complesse) per ogni valore V_h, $h = 0, 1, .., N-1$. Poichè si debbono calcolare N valori, in totale sono richiesete N^2 somme ed N^2 moltiplicazioni. Questo si può abbreviare dicendo che il calcolo della DFT ha complessità di calcolo $O(N^2)$, cioè richiede un numero di operazioni proporzionali ad N^2.

Senza entrare nei dettagli dell'implementazione (versioni in $C++$, $Fortran$, $Pascal$ e molti altri linguaggi sono disponibili in rete), il grosso vantaggio della Fast Fourier Transform è che permette di calcolare la trasformata V_h, $h = 0, 1, ..., N-1$ con una complessità $O(N \log_2 N)$ cioè con un numero di calcoli proporzionale ad $N \log_2 N$. Ci si rende presto conto del vantaggio in termini di velocità di calcolo; si noti, a titolo esemplificativo, che per $N = 1024$, $N^2 = 1048576$ mentre $N \log_2 N = 10240$; quindi, per $N = 1000$, il numero di operazioni necessarie viene ridotto di un ordine 100.

4 Approssimazione della Trasformata di Fourier usando la DFT

In questa sezione si vedrà come, a partire dai campioni $v_a(kT_c)$ di un segnale a tempo continuo $v_a(t)$, sia possibile calcolare, in maniera approssimata, la trasformata di Fourier $V_a(f)$ su una griglia di valori $f = kF$. Il calcolo richiede la scelta dei parametri T_c ed F che dipendono dalle caratteristiche del segnale; queste scelte saranno discusse nel seguito.

Si facciano in prima battuta le seguenti ipotesi:

1. Il segnale $v_a(t)$ ha durata rigorosamente limitata, cioè esiste un intervallo $I = [a, b]$ tale che $v(t) = 0$, $\forall t \notin [a, b]$. La quantità $D := b - a$ assume il significato di “durata” del segnale.

2. Il segnale $v_a(t)$ ha banda B rigorosamente limitata, cioè $V_a(f) = 0 \ \forall |f| > B$.

Come noto dalla teoria queste ipotesi NON POSSONO essere verificate contemporaneamente. Infatti un segnale a durata limitata non può avere banda limitata e viceversa. Si pensi ad esempio al segnale a durata limitata $v_a(t) = \Pi(t)$: la sua trasformata di Fourier è $V_a(f) = \mathrm{sinc}(f)$ e di conseguenza il segnale non ha certamente banda limitata.

In ogni modo è utile dal punto di vista concettuale assumere che entrambe le ipotesi siano verificate. Nella pratica si tratterà di individuare un intervallo temporale I ed un valore B tali che, rispettivamente, $v_a(t)$ sia "praticamente nullo" per $t \notin I$ e $V_a(f)$ "praticamente nullo" per $|f| > B$. Per questo motivo il risultato del calcolo sarà approssimato; l'approssimazione sara "tanto più buona quanto più piccoli sono il segnale per $t \notin I$ e la trasformata per $|f| > B$". La scelta di questi parametri può essere fatta sulla base di considerazioni energetiche dello stesso tipo utilizzante per la scelta del passo di campionamento nel teorema del campionamento quando il segnale NON è a banda rigorosamente limitata.

Con queste avvertenze nel seguito si assumerà che le ipotesi 1. e 2. siano verificate. Si tornerà solo alla fine alle questioni legate alla scelta "pratica" di durata e banda. Si consideri ora la ripetizione periodica $v_{ap}(t)$ con periodo T del segnale $v_a(t)$:

$$v_{ap}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_a(t - kT).$$

Grazie all'ipotesi di durata finita del segnale $v_a(t)$, i termini della somma per indici diversi non si sovrappongono non appena $T > D$. In altre parole, se $T > D$, $v_{ap}(t) = v_a(t)\ \forall t \in [a, b]$.

Il segnale periodico $v_{ap}(t)$ si può espandere in serie di Fourier

$$v_{ap}(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} V_h \mathrm{e}^{j2\pi \frac{h}{T} t}$$

dove, grazie alla ben nota relazione tra serie e trasformata di Fourier, vale

$$V_h = F V_a(hF) \quad \text{con} \quad F = \frac{1}{T}, \quad V_a(f) = \mathcal{F}[v_a](f)$$

Il parametro $F = 1/T < 1/D$, assume quindi il significato di "passo di campionamento" della trasformata di Fourier. Sarà necessario quindi, per ottenere i valori della trasformata su una griglia "fitta" (cioè F piccolo), scegliere valori "grandi" di T, cioè ripetere periodicamente il segnale con periodo lungo. Il limite inferiore del periodo è chiaramente determinato dalla durata D del segnale.

Grazie all'ipotesi di limitazione in banda del segnale $v_a(t)$, cioè al fatto che $V(f) = 0$, $\forall |f| > B$, i coefficienti di Fourier con $|h| > \lfloor BT \rfloor$ (cioè $|hF| > B$) sono nulli, i.e. $V_h = FV_a(hF) = 0$, $\forall |h| > \lfloor BT \rfloor$, dove $\lfloor BT \rfloor$ indica la parte intera inferiore di BT.

Utilizzando infine il fatto che $v_{ap}(t) = v_a(t)$, $\forall t \in I = [a, b]$, si ottiene che

$$v_a(t) = \sum_{h=-\lfloor BT \rfloor}^{\lfloor BT \rfloor} V_h \mathrm{e}^{j2\pi \frac{h}{T} t}.$$

È possibile ora valutare il segnale $v_a(t)$ negli istanti di tempo $t = kT_c$ ottenendo:

$$v(k) = v_a(kT_c) = \sum_{h=-\lfloor BT \rfloor}^{\lfloor BT \rfloor} V_h \mathrm{e}^{j2\pi \frac{h}{T} kT_c}. \tag{4}$$

La questione ora è quella di scegliere un valore T_c opportuno; il teorema del campionamento fornisce la risposta a questa domanda. Si sa infatti che, dato un segnale a banda limitata B, è possibile ricostruire il segnale a partire dai campioni non appena $T_c < \frac{1}{2B}$, o, in altre parole, $B < \frac{1}{2T_c}$. Ricordando infatti la dimostrazione del teorema del campionamento, se il passo $T_c < \frac{1}{2B}$, la trasformata del segnale di partenza $V_a(f)$ si può recuperare dalla trasformata del segnale campionato $v_a(kT_c)$.

Per scelte di T_c che non soddisfino questa condizione non è possibile ricostruire il segnale e/o la sua trasformata di Fourier a partire dai campioni $v_a(kT_c)$.

Si consideri ora un valore di $T_c < \frac{1}{2B}$ della forma [1] $T_c = T/N$, cioè tale che il periodo del segnale sia uguale ad un multiplo del passo di campionamento. Questa condizione garantisce che il segnale a tempo discreto $v(k) = v_a(kT_c)$ sia periodico di periodo $N = T/T_c$.

Con questa scelta (si osservi che $\lfloor BT \rfloor < \frac{N}{2}$) nella formula (4) si possono sostituire gli estremi della somma con $\frac{N}{2} - 1$ e $-\frac{N}{2}$ rispettivamente. Ricordando inoltre che $T/Tc = N$ si ottiene:

$$v(k) = v(kT_c) = \sum_{h=-N/2}^{N/2-1} V_h e^{j\frac{2\pi}{N}hk}. \tag{5}$$

Definendo ora la sequenza $\bar{V}_h$ nel segunte modo:

$$\bar{V}_h = \begin{cases} V_h & h \in [0, N/2) \\ V_{h-N} & h \in [N/2, N) \end{cases} \tag{6}$$

e sfruttando la periodicità delle funzioni esponenziali, i.e.

$$e^{j\frac{2\pi}{N}hk} = e^{j\frac{2\pi}{N}k(h-N)}$$

si può riscrivere la (5) nella forma:

$$v(kT_c) = \sum_{h=-N/2}^{N/2-1} V_k e^{j\frac{2\pi}{N}hk} = \sum_{h=0}^{N-1} \bar{V}_k e^{j\frac{2\pi}{N}hk}. \tag{7}$$

Si noti che la (7) è proprio l'equazione di sintesi (2) per il segnale periodico di periodo N a tempo discreto $v_k = v_{ap}(kT_c)$.

L'ultimo "aggiustamento", se si utilizza la funzione `fft.m` di Matlab, è quello di ricordare che, data una sequenza $v(k)$, $k = 0, 1, .., N-1$, e definito il vettore $\mathtt{vett} = [\mathtt{v}(0), \mathtt{v}(1), .., \mathtt{v}(\mathtt{N}-1)]$, il comando `Vfft= fft(vett)` restituisce un vettore `Vfft` di N elementi, che corrispondono ai coefficienti della DFT moltiplicati per N, cioè $\mathtt{Vfft} = \mathtt{N}[\bar{\mathtt{V}}_0, \bar{\mathtt{V}}_1, ..., \bar{\mathtt{V}}_{\mathtt{N}-1}]$.

In conclusione, i valori della trasformata di Fourier $V_a(hF)$ si possono ottenere dal vettore contenente i campioni del segnale $\mathtt{vett} = [\mathtt{v}_{\mathtt{ap}}(0), \mathtt{v}_{\mathtt{ap}}(\mathtt{T_c}), .., \mathtt{v}_{\mathtt{ap}}((\mathtt{N}-1)\mathtt{T_c})]$ usando l'istruzione Matlab:

$$\overline{\mathtt{Vfft}} = \frac{\mathtt{T}}{\mathtt{N}}\mathtt{fft(vett)};$$

vettore $\overline{\mathtt{Vfft}}$ contiene i valori (approssimati) della trasformata $V_a(hF)$, nelle seguenti posizioni (supponendo per semplicità N pari):

$$\overline{\mathtt{Vfft}} = [V_a(0), V_a(F), V_a(2F), .., V_a((N/2-1)F), V_a((-N/2)F), ..V_a(-2F), V_a(-F)]$$

[1] Per semplicità assumeremo che N sia pari.

5 Esempio di applicazione e considerazioni pratiche

Come esempio si consideri il calcolo per via numerica della trasformata di Fourier del segnale $v_a(t) = \Pi(t)$.

Seguendo le "istruzioni" della sezione precedente è necessario, per prima cosa, individuare la "durata" del segnale.

In questi caso il segnale è nullo al di fuori dell'intervallo $I = [-1/2, 1/2]$ e quindi ha durata $D = 1$. Sarà quindi necessario scegliere $T > D = 1$. Si consideri ora la ripetizione periodica del segnale $v_a(t)$ con periodo T. Per calcolare i campioni (approssimati) della trasformata $V(hF) = V(h/T)$ è necessario scegliere il passo di campionamento T_c, che dipende appunto dalla banda B del segnale. Come sappiamo il segnale $\Pi(t)$ ha banda illimitata; si dovrà quindi scegliere un valore di T_c tale che la trasformata al di fuori dell'intevallo $[-1/(2T_c), 1/(2T_c)]$ si "piccola". In generale, questa scelta deve essere fatta senza conoscere la trasformata. Un procedimento euristico potrebbe essere il seguente: si sceglie in valore di T_c e si calcola la DFT. Se la trasformata calcolata è "piccola" agli estremi di un periodo (cioè per $f \simeq \frac{1}{2T_c}$) allora si può effettivamente pensare che la scelta vada bene, altrimenti si deve ridurre il valore di T_c.

Vediamo come queste considerazioni si applicano all'esempio scelto. Si scelga $T = 4$ (che significa "campionare" la trasformata con passo di campionamento in frequenza $F = \frac{1}{T} = 0.25 Hz$; si scelga anche $T_c = 0.05\ s$ (cioè $N = 80$). I risultati sono riportati in Figura 1.

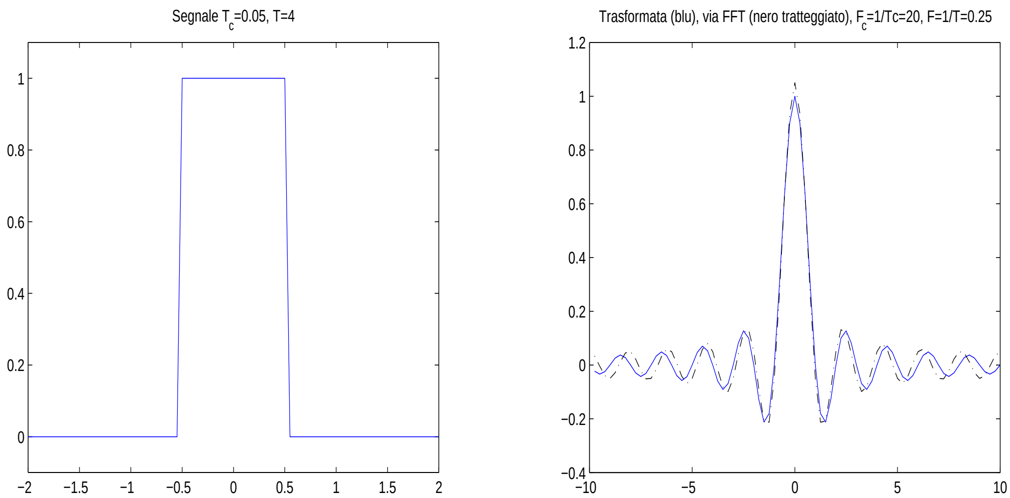

Figure 1: Calcolo con $T = 4, T_c = 0.05$.

La trasformata non è nulla agli estremi dell'intervallo. Come si può vedere questo comporta che, oltre a non calcolare la trsformata per $f > 1/(2T_c)$, anche i valori calcolati per f "piccolo" si discostano dai valori "veri" (che in questo caso sono noti, linea continua).

Se si diminuisce il valore di $T_c = 0.025$, che corrisponde a $N = 160$, si ottengono i risultati di Figura 2. La trasformata ai bordi ora è più piccola, e si può vedere che anche l'errore "in banda" (cioè per $|f| < 1/(2T_c)$) diminuisce. L'approssimazione è ancora migliore scegliendo $T_c = 0.01$, i.e. $N = 400$. (si veda la Figura 3).

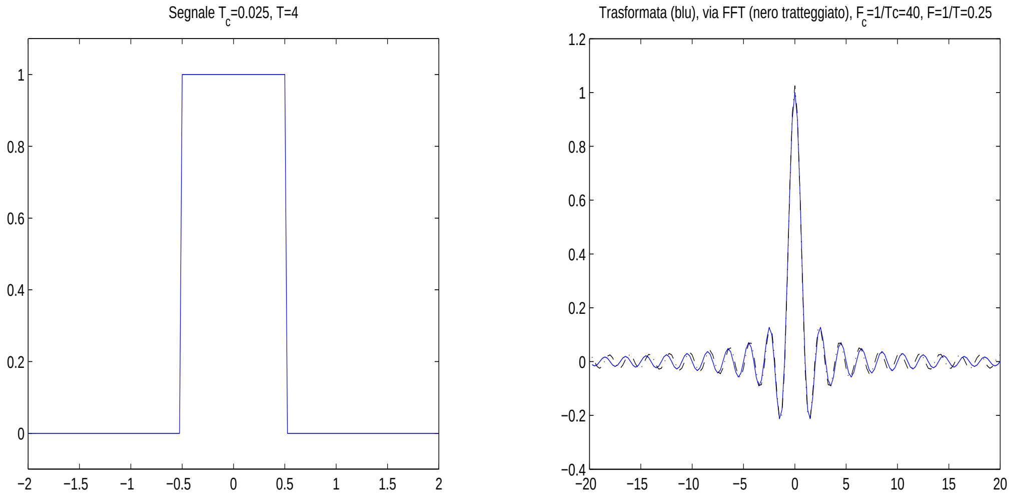

Figure 2: Calcolo con $T = 4, T_c = 0.025$.

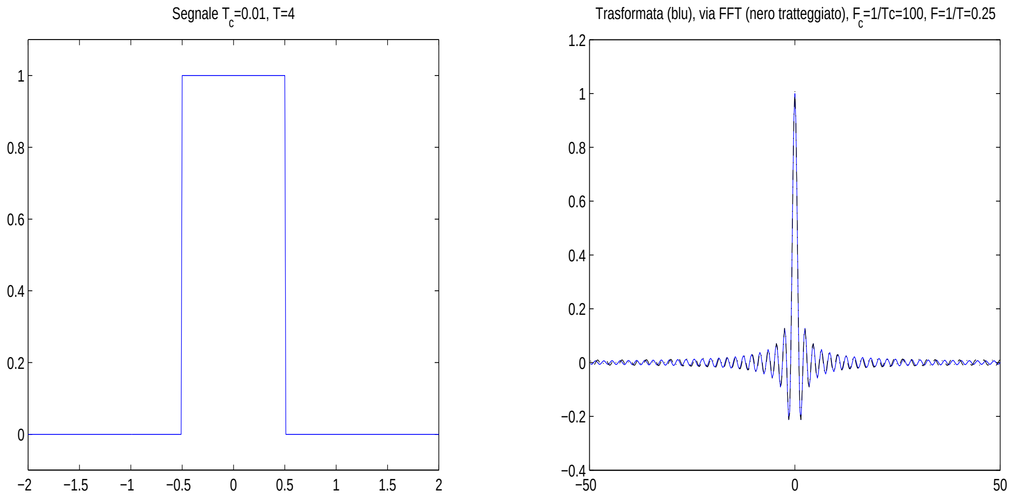

Figure 3: Calcolo con $T = 4, T_c = 0.01$.

References

[1] J. W. Cooley and J. W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex fourier series. *Math. Computat.*, 19:297–301, 1965.

[2] M. T. Heideman, D. H. Johnson, and C. S. Burrus. Gauss and the history of the fast Fourier transform. *IEEE ASSP Magazine*, 4:14–21, 1984.