COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
3 febbraio 2016

Teoria 1. [5 punti] Dato un modello di stato lineare a tempo continuo ($t \in \mathbb{R}$), con stato di dimensione n

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned}$$

si ricavi l'espressione della funzione di trasferimento $W(s)$ e si dimostri che $W(s)$ è invariante per trasformazioni di base $\bar{x}(t) := T^{-1}x(t)$ ($T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, invertibile).

Teoria 2. [5 punti] Dato un modello di stato lineare a tempo discreto, si dia la definizione di raggiungibilità e si discuta il legame tra raggiungibilità e funzione di trasferimento $W(z)$.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
3 febbraio 2016

Esercizio 1. [8 punti] Si consideri il sistema dinamico

$$\dot{x}(t) = \left(\alpha x^3(t) + \beta x(t)\right) u(t) \tag{1}$$

1. Si trovino, al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, i punti di equilibrio di (1)

2. Si studi, al variare di α e β, la loro stabilità con riferimento ad ingressi costanti del tipo $u(t) = \bar{u}$ (si usi, se necessario, la funzione di Lyapunov $V(x) = \frac{1}{2}x^2$).

Esercizio 2. [6 punti] Si consideri il modello di stato a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} \frac{13}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{11}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{11}{6} & \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{2}$$

1. Si studino la raggiungibilità e la controllabilità; si trovi la forma standard di raggiungibilità

2. Si progetti, se possibile, un controllo in retroazione dallo stato un modo che il sistema in catena chiusa sia asintoticamente stabile (controllore stabilizzante)

Esercizio 3. [8 punti] Si consideri la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+4}$$

1. Si scriva un modello di stato che ammetta $W(s)$ come funzione di trasferimento

2. Si dica se esiste una retroazione dallo stato che garantisca, per ogni condizione iniziale, che l'evoluzione libera abbia la forma $ce^{\lambda t}$ per un'opportuna scelta di c e λ

3. Si dica se esiste una retroazione dallo stato che garantisca che la risposta impulsiva del sistema retroazionato abbia il solo modo $e^{\lambda t}$ (per un'opportuno λ)

4. Si consideri ora un sistema con due uscite e matrice di trasferimento

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+1}{s^2+2s+4} \\ \frac{3s+3}{s^2+2s+4} \end{bmatrix}.$$

   Si scriva un modello di stato che ammetta $W_2(s)$ come matrice di trasferimento.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

1) [**3 punti**] I punti di equilibrio di trovano risolvendo l'equazione $\dot{x}(t) = 0$; quindi:

$$\dot{x}(t) = \left(\alpha x^2(t) + \beta\right) x(t)u(t)$$

Di conseguenza i pundi x^* di equilibrio sono:

- ogni $x^* \in \mathbb{R}$ se $u(t) = 0$ e/o $(\alpha, \beta) = (0, 0)$
- $x^* = 0$ se $\{\beta/\alpha \geq 0, \alpha \neq 0\} \cup \{\alpha = 0\}$ e $u(t)$ qualunque.
- $x^* \in \{0, \pm\sqrt{-\beta/\alpha}\}$ se $\{\beta/\alpha < 0, \alpha \neq 0\}$ e $u(t)$ qualunque.

2) [**5 punti**] Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio consideriamo $u(t) = \bar{u}$.

- Se $\bar{u} = 0$ e/o $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ ogni $x^* \in \mathbb{R}$ è di equilibrio. Quindi tutti i punti sono di equilibrio semplicemente (ma non asintoticamente) stabile.
- Se $\bar{u} \neq 0$ e $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, c'è un solo punto di equilibrio $x^* = 0$. Il sistema è lineare (per $u(t) = \bar{u}$) e di conseguenza x^* è asintoticamente stabile se $\beta\bar{u} < 0$ ed instabile altrimenti.

Se $\alpha \neq 0$ l'equazione della dinamica si può riscrivere nella forma

$$\dot{x}(t) = \alpha\left(x^2(t) + \frac{\beta}{\alpha}\right) x(t)\bar{u} \tag{3}$$

- Se $\bar{u} \neq 0$ e $\beta/\alpha \geq 0$ c'è un solo punto di equilibrio $x^* = 0$. Usando (3) il segno $sgn\left(\dot{x}(t)\right)$ di $\dot{x}(t)$ soddisfa:

  $$sgn\left(\dot{x}(t)\right) = sgn\left(\alpha\left(x^2(t) + \frac{\beta}{\alpha}\right)\bar{u}\right) sgn\left(x(t)\right)$$

  Poichè, $\forall x(t) \neq 0$, $\left(x^2(t) + \frac{\beta}{\alpha}\right) > 0$ abbiamo che

  $$sgn\left(\dot{x}(t)\right) = \begin{cases} sgn(\alpha\bar{u}) & x(t) > 0 \\ -sgn(\alpha\bar{u}) & x(t) < 0 \end{cases}$$

  Di conseguenza $x^* = 0$ è asintoticamente stabile se $\alpha\bar{u} < 0$ ($\dot{x} > 0$ se $x < 0$ e $\dot{x} < 0$ se $x > 0$ e quindi x deve tendere a $x^* = 0$), instabile altrimenti.

- Se $\bar{u} \neq 0$ e $\beta/\alpha < 0$ ci sono 3 punti di equilibrio $\{0, \pm\sqrt{-\beta/\alpha}\}$. Sempre usando (3), si vede che

  $$sgn\left(x^2(t) + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \begin{cases} -1 & x(t) \in \left(-\sqrt{-\beta/\alpha}, \sqrt{-\beta/\alpha}\right) \\ 1 & |x(t)| > \sqrt{-\beta/\alpha} \end{cases}$$

Di conseguenza:

$$sgn\left(\dot{x}(t)\right) = \begin{cases} -sgn(\alpha\bar{u})\cdot sgn(x(t)) & x(t)\in\left(-\sqrt{-\beta/\alpha},\sqrt{-\beta/\alpha}\right) \\ sgn(\alpha\bar{u})\cdot sgn(x(t)) & |x(t)|>\sqrt{-\beta/\alpha} \end{cases}$$

qundi, se $\alpha\bar{u}>0$ si ha che $x^*=0$ é un punto di equilibrio asintoticamente stabile, mentre $x^*=\pm\sqrt{-\beta/\alpha}$ sono instabili. Viceversa, se $\alpha\bar{u}<0$ si ha che $x^*=0$ é un punto di equiibrio instabile, mentre $x^*=\pm\sqrt{-\beta/\alpha}$ sono asintoticamente stabili.

Ovviamente le stesse conclusioni si sarebbero potute ottenere studiando il segno della derivata della funzione di Lyapunov. Ovviamente per $x^*=0$ si deve considereare

$$V(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$\dot{V}(x)=\dot{x}x=\alpha\bar{u}\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}\right)x^2\bar{u}$$

Chiaramente $\dot{V}(x)<0$ in un introno di $x^*=0$ se $\alpha\bar{u}<0$ (x^* asntoticamente stabile) mentre $\dot{V}(x)>0$ (x^* instabile) se $\alpha\bar{u}<0$. I casi "limite" $\alpha=0$ si deve studiare separatamente come sopra.

Per $x^*=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ si deve considerare (si ricordi che la funzione di Lyapunov deve essere nulla nel punto di equilibrio e positiva in un intorno del punto di equilibrio)

$$V(x)=\frac{1}{2}\left(x-x^*\right)^2=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}\left(x-\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)=\left(\alpha x^2+\beta\right)\left(x-\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)x\bar{u} \\ &= \alpha\left(x^2+\tfrac{\beta}{\alpha}\right)\left(x-\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)x\bar{u} \\ &= \alpha\left(x-\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\left(x+\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)\left(x-\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)x\bar{u} \\ &= \alpha\bar{u}\left(x-\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)^2\left(x+\sqrt{-\tfrac{\beta}{\alpha}}\right)x\end{aligned}$$

e si vede immediatamente che $\dot{V}(x)>0$ ($x^*=\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$ instabile) per $\alpha\bar{u}>0$ e $\dot{V}(x)<0$ ($x^*=\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}$ asintoticamente stabile) per $\alpha\bar{u}<0$

In maniera analoga, si studia la stabilità di $x^*=-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ prendendo

$$V(x)=\frac{1}{2}\left(x-x^*\right)^2=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2$$

Esercizio 2.

1) **[4 punti]** La matrice di raggiungibilità

$$R = [G\ FG\ F^2G] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 1. Quindi la dimensione del sottospazio raggiungibile è 1 e coincide, di conseguenza, con l'immagine di G

$$\mathcal{R} = Im(G)$$

La matrice F ha un autovalore in $1/2$ con autovettore $(0,0,1)^\top$ (non raggiungibile) e quindi il sistema non è controllabile (per essere controllabile tutti gli autovalori del sottosistema non raggiungibile devono essere nell'origine. Alternativamente, usando il PBH test, bastava verificare che la matrice $[zI - F\ G]$ perde rango per $z = 1/2$, infatti:

$$[zI - F\ G]_{z=1/2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{13}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 \\ \frac{11}{6} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6} & 0 & -1 \\ -\frac{11}{6} & -\frac{11}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 \\ \frac{11}{6} & \frac{2}{6} & 0 & -1 \\ -\frac{11}{6} & -\frac{11}{6} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ha rango 2 (i.e. che $\lambda = 1/2$ è autovalore "non raggiungibile".)

Per mettere il sistema in forma standard di raggiungibilità basta usare la matrice di trasformazione di base

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove la prima colonna non è altro che la matrice G (che forma una base dello spazio raggiungibile) mentre le altre due colonne sono prese (ortogonali alla prima) per completare T ad una base di $\mathbb{R}^3$. Osservando che T è stata costruita con colonne ortogonali (ma non a norma unitaria), si calcola facilmente l'inversa

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} .5 & -.5 & 0 \\ .5 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ottenendo:

$$\bar{F} = T^{-1}FT = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\bar{G} = T^{-1}G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2) **[2 punti]** Poichè gli autovalori del sottosistema non raggiungibile sono $\lambda_1 = 1/3$ e $\lambda_2 = 1/2$ (si vede immediatamente dalla forma standard di raggiungibilità (4) dove il blocco F_{22} è triangolare inferiore), basta trovare $K = [k_1\ k_2\ k_3]$ in modo che l'autovalore

del sistema raggiungibile sia stabile. Scegliamo quindi $\bar{K} = [\bar{k}_1\ \bar{k}_1\ \bar{k}_3] := KT$ in modo che:

$$\bar{F} + \bar{g}\bar{K} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & \bar{k}_2 & \bar{k}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\bar{k}_1 & 2+\bar{k}_2 & \bar{k}_3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

abbia tutti gli autovalori dentro al cerchio di raggio unitario. In particolare è sufficiente prendere $|2 + \bar{k}_1| < 1$ per soddisfare il requisito richiesto. Chiaramente, utlizzando $\bar{x}(t) = T^{-1}x(t)$

$$\bar{K}\bar{x}(t) = \bar{K}T^{-1}T\bar{x}(t) = \underbrace{\left(\bar{K}T^{-1}\right)}_{K} x(t)$$

si ha che la retroazione richiesta è

$$K = \bar{K}T^{-1}$$

Esercizio 3.

1) **[2 punti]** Per scrivere un modello di stato basta utilizzare le ben note formule, ad esempio basate sulla forma canonica di controllo. Per prima cosa, dato che

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{2s+1}{s^2+2s+4}$$

è strettamente propria si ha $J = 0$. Poi basta prendere

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = [b_0\ \ b_1] = [1\ \ 2]$$

2) **[2 punti]** Poichè il sistema è raggiungibile con un ingresso, deve avere un solo miniblocco di Jordan per ogni autovalore. Poichè la retroazione dallo stato non modifica la proprietà di raggiungibilità (cioè $(F + gK, g)$ raggiungibile se e solo se (F, g) raggiungibile) lo stesso vale per il sistema retroazionanato. Di conseguenza, è possibile allocare gli autovalori a piacimento, ma se $F + gK$ ha un solo autovalore λ (di molteplicità 2), la sua forma di Jordan deve avere un solo miniblocco e quindi i modi sono $e^{\lambda t}$ e $te^{\lambda t}$. Quindi non è possibile trovare la retroazione richiesta.

3) **[2 punti]** Affinchè la risposta impulsiva contenga il solo modo $e^{\lambda t}$ basta trovare una retroazione in modo che uno degli autovalori di F sia "cancellato" dallo zero del polinomio a numeratore $2s + 1$ (questo è possibile perchè il sistema è completamente raggiungibile e quindi gli autovalori sono allocabili arbitrariamente). In quel caso la funzione di trasferimento diventa

$$W(s) = \frac{2s+1}{(s-\lambda)(s+1/2)} = \frac{2}{s-\lambda}$$

e quindi la risposta impulsiva risulta $w(t) = 2e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)$

Ad esempio (anche se NON era esplicitamente richiesto dal testo di trovare la retroazione), basta prendere $K = [k_1\ k_2]$ in modo che

$$\det[sI - (F + KG)] = \left(s + \frac{1}{2}\right)^2 = s^2 + s + \frac{1}{4}$$

e quindi:

$$\begin{array}{rcl} -4+k_1 & = & -\frac{1}{4} \\ -2+k_2 & = & 1 \end{array}$$

da cui $k_1 = \frac{11}{4}$ e $k_2 = 3$. Con questa scelta si ha $W(s) = \frac{2}{s+\frac{1}{2}}$ e quindi $w(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\delta_{-1}(t)$.

4) **[2 punti]** Una realizzazione della matrice di trasferimento $W_2(s)$ si ottiene immediatamente osservando che

$$W_2(s) = \begin{bmatrix} W_{12}(s) \\ W_{22}(s) \end{bmatrix} = H_2(sI - F_2)^{-1}g_2 = \begin{bmatrix} H_{12} \\ H_{22} \end{bmatrix} (sI - F_2)^{-1}g_2$$

dove $H_{12}(sI-F_2)^{-1}g_2$ e $H_{22}(sI-F_2)^{-1}g_2$ sono, rispettivamente, realizzazioni di $W_{12}(s)$ e $W_{22}(s)$ (rispettivamente la prima e seconda riga di $W_2(s)$). Utilizzando la stessa tecnica usata al punto 1), basta quindi prendere

$$F_2 = F \quad g_2 = g \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

dove F e g sono quelle calcolate al punto 1).