COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
25 febbraio 2016

Teoria 1. [5 punti] Dato un modello di stato lineare a tempo discreto ($t \in \mathbb{Z}$), con stato di dimensione n

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned}$$

si diano la definizioni di osservabilità, ricostruibilità e rivelabilità. Si discutano queste proprietà in relazione al PBH test.

Teoria 2. [5 punti] Dato un sistema dinamico (in generale non lineare) a tempo continuo, si diano le definizioni di punto di equilibrio, di stabilità e asintotica stabilità. Si enunci il criterio di stabilità di Lyapunov.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI TEORIA DEI SISTEMI
25 febbraio 2016

Esercizio 1. [8 punti] Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad t \in \mathbb{Z} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{1}$$

1. Si trovi, se possibile, una retroazione dallo stato che renda il sistema asintoticamente stabile
2. Si trovi, se possibile, una retroazione dallo stato che, utilizzando solo il primo ingresso, renda il sistema asintoticamente stabile
3. Si dica se è possibile trovare una retroazione dallo stato che usi solamente il secondo ingresso, in modo che il sistema retroazionato abbia solo i modi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^t \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^t$$

   PS: Non è necessario trovare esplicitamente la retroazione

Esercizio 2. [8 punti] Si consideri il modello di stato a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad t \in \mathbb{Z} \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Si progetti, se possibile, un regolatore $u(t) = K\hat{x}(t)$ (retroazione dallo stato stimato) in modo che:

1. La funzione di trasferimento in catena chiusa sia asintoticamente stabile
2. L'errore di stima dello stato converga a zero nel minimo numero di passi possibile. Si dica in quanti passi l'errore converge a zero con il regolatore progettato.

Esercizio 3. [6 punti] Si consideri la funzione di trasferimento

$$W(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2}$$

1. Si scriva un modello di stato che ammetta $W(s)$ come funzione di trasferimento
2. Si progetti, se possibile, una retroazione dallo stato $u(t) = Kx(t)$ in modo che la funzione di trasferimento del sistema retroazionato sia

$$W_K(s) = \frac{1}{s+4}$$

3. Si dica se la realizzazione del sistema così retroazionato è raggiungibile e/o osservabile

SOLUZIONI

Esercizio 1.

1) **[3 punti]**

Il sistema è raggiungibile perchè la matrice di raggiungibilità a due passi ha rango pieno

$$\mathcal{R}_2 := [G\, FG] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno. Quindi esiste una retroazione che rende il sistema asintoticamente stabile. Definiendo

$$F_K := F + GK = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} K$$

è sufficiente scegliere

$$K := \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & k_{23} \end{bmatrix}$$

in modo che

$$F_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_{11} & 1 + k_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 2 + k_{23} \end{bmatrix}$$

e scegliere k_{11}, k_{12}, k_{23} in modo che

$$det(zI - F_K) = (z - (2 + k_{23})((z-1)(z - (1 + k_{12})) - k_{11})$$

abbia tutte le radici a modulo minore di 1. Ad esempio, scegliendo $k_{23} = -\frac{3}{2}$ e $k_{12} = -2$, $k_{11} = -1$ si ottiene

$$det(zI - F_K) = (z - \frac{1}{2})z^2$$

le cui radici sono $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

2) **[3 punti]** Il sistema NON è raggiungibile con il primo ingresso. Infatti la matrice di raggiungibilità usando il solo primo ingresso risulta

$$\mathcal{R}^1 := [g_1\; Fg_1\; F^2 g_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha chiaramente rango 2. Poichè gli autovalori di F sono 1 (con molteplicità 2) e 2, non è possibile stabilizzare il sistema con un solo ingresso.

La soluzione sarebbe stata completa a questo punto.

Avendo invece la possibilità di eseguire una retroazione preliminare (che però deve usare entrambi gli ingressi), si può utilizzare il Lemma di Heyman per rendere il sistema raggiungibile con il solo primo ingresso, come segue:

$$F_1 = F + GSQ^{-1}$$

dove

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$Q := [g_1 \ Fg_1 \ g_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

È immediato verificare che

$$[g_1 \ F_1 g_1 \ F_1^2 g_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ha rango pieno ed ora la coppia (F_1, g_1) è raggiungibile con il solo primo ingresso. Si può ora progettare la retroazione che usi solo il primo ingresso

$$F_{1K} = F_1 + g_1 [k_1 \ k_2 \ k_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k_1 & 1 + k_2 & k_3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Si calcola il polinomio caratteristico, ottenendo

$$\begin{aligned} det(zI - F_{1K}) &= (z-1)(z-2)(z-1-k_2) - (z-2)k_1 - k_3 \\ &= z^3 + (-k_2 - 4)z^2 + (5 + 3k_2 - k_1)z + (-k_3 + 2k_1 - 2k_2 - 2) \end{aligned}$$

Imponendo ad esempio che il polinomio caratteristico abbia tutte le radici in $\frac{1}{2}$ si ottiene

$$det(zI - F_{1K}) = \left(z - \frac{1}{2}\right)^3 = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{8}$$

e quindi dobbiamo imporre:

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{2} &= -k_2 - 4 \\ \tfrac{3}{4} &= 5 + 3k_2 - k_1 \\ -\tfrac{1}{8} &= -k_3 + 2k_1 - 2k_2 - 2 \end{aligned}$$

che si risolve scegliendo:

$$\begin{aligned} k_2 &= \tfrac{3}{2} - 4 = -\tfrac{5}{2} \\ k_1 &= -\tfrac{3}{4} + 5 + 3k_2 = -\tfrac{13}{4} \\ k_3 &= +\tfrac{1}{8} + 2k_1 - 2k_2 - 2 = -\tfrac{27}{8} \end{aligned}$$

2) **[2 punti]** Il sistema NON è raggiungibile con il secondo ingresso; quindi non è possibile allocare gli autovalori di F (che sono in 1 e 2) in $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. La risposta era corretta fermandosi a questo punto.

In ogni modo, anche avendo la possibilità di eseguire una retroazione preliminare (che però deve usare entrambi gli ingressi) per rendere il sistema raggiungibile con il secondo ingresso (Lemma di Heyman), il sistema così retroazionato è raggiungibile con un solo ingresso e quindi $F_2 := F + GS_2Q_2^{-1}$ è ciclica. Di conseguenza, retroazionando dal secondo ingresso

$$F_{2K} := F_2 + g_2K_2$$

risulterà comunque che F_{2K} è ciclica e quindi avrà un solo miniblocco di Jordan per ogni autovalore. Di conseguenza o ha tre autovalori distinti (e quindi 3 modi) opporre due autovalori distinti, uno dei quali con molteplicità algebrica due e geometrica uno. Supponiamo ad esempio che la retroazione abbia allocato due autovalori in $\frac{1}{2}$ e uno in $\frac{1}{3}$; poichè la moltiplicità geometrica di $\frac{1}{2}$ è uno, deve comparire, oltre al modo $\left(\frac{1}{2}\right)^t$ anche il modo $t\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Quindi la retroazione cercata NON esiste.

Esercizio 2. [8 punti]

Il sistema è raggiungibile e osservabile. Infatti:

$$\mathcal{R} := [g \; Fg \; F^2g] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_2 := \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hanno entrambe rango pieno.

Per soddisfare le richieste è sufficiente trovare K ed L in modo che $F+gK$ abbia tutti gli autovalori a modulo minore di 1 ed $F+LH$ sia nilpotente con indice di nilpotenza minimo.

Per la retroazione dallo stato K otteniamo:

$$\begin{aligned} F_K := F + gK &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1+k_1 & k_2 & k_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

da cui:

$$det(zI - F_K) = (z+1)(z^2+(2-k_1)z+k_1-k_2-1)-k_3 = z^3+(3-k_1)z^2+(1-k_2)z+k_1-k_2-k_3-1$$

Imponendo, ad esempio, $det(zI - F_K) = (z - \frac{1}{2})^2 = z^3 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z - \frac{1}{8}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} -\tfrac{3}{2} &= 3 - k_1 \\ \tfrac{3}{4} &= 3 - 2k_1 - k_2 \\ -\tfrac{1}{8} &= 1 - k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

da cui:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= \tfrac{9}{2}\\
k_2 &= -\tfrac{27}{4}\\
k_3 &= \tfrac{27}{8}
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda l'errore di stima, la sua dinamica è regolata dalla matrice

$$
\begin{aligned}
F+LH &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12}\\ \ell_{21} & \ell_{22}\\ \ell_{31} & \ell_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} -1 & \ell_{11} & \ell_{12}\\ 1 & \ell_{21}-1 & \ell_{22}\\ 0 & 1+\ell_{31} & -1+\ell_{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Poiché, chiaramente, non è mai possibile scegliere L in modo che $F+LH=0$, l'errore di stima non può andare a zero in un passo. Ponendo

$$
L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12}\\ \ell_{21} & \ell_{22}\\ \ell_{31} & \ell_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0\\ 2 & 0\\ -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

si ottiene

$$
F+LH = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

che soddisfa $(F+LH)^2 = 0$; quindi L appena trovato garantisce che l'errore di stima converge a zero in 2 passi.

Esercizio 3.

$$
W(s) = \frac{s+4}{s^2+3s+2}
$$

1. Si scriva un modello di stato che ammetta $W(s)$ come funzione di trasferimento

2. Si progetti, se possibile, una retroazione dallo stato $u(t) = Kx(t)$ in modo che la funzione di trasferimento del sistema retroazionato sia

$$
W_K(s) = \frac{1}{s+4}
$$

3. Si dica se la realizzazione del sistema così retroazionato è raggiungibile e/o osservabile

Esercizio 3.

1) **[2 punti]** Per scrivere un modello di stato basta utilizzare le ben note formule, ad esempio basate sulla forma canonica di controllo. Per prima cosa, dato che

$$
W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{s+4}{s^2+3s+2}
$$

è strettamente propria si ha $J = 0$. Poi basta prendere

$$
F = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad g = \begin{bmatrix} 0\\ 1 \end{bmatrix} \qquad H = [b_0 \;\; b_1] = [4 \;\; 1]
$$

2) **[2 punti]** Affinchè il sistema retroazionato abbia funzione di trasferimento

$$W_K(s) = \frac{1}{s+4}$$

si deve scegliere K affinchè il polinmio caratteristico di $F + GK$ sia $(s+4)^2$ in modo che

$$W_K(s) = \frac{s+4}{(s+4)^2} = \frac{1}{s+4}$$

questo s̀empre possibile perchè il sistema in forma canonica di conrollo è raggiungibile.

In particolare basta scegliere $K = [-14 \;\; -5]$ per ottenere i polinomio caratteristico desiderato.

3) **[2 punti]** Il sistema retroazionato è una realizzazione non minima della funzione di trasferimento $W_k(s)$ e quindi non può essere contemporaneamente raggiungibile ed osservabile. Poichè la retroazione dallo stato non modifica le proprietà di raggiungibilità allora il sistema deve essere non osservabile.

Una verifica immediata mostra infatti che

$$\mathcal{O} := \begin{bmatrix} H \\ HF_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -16 & -4 \end{bmatrix}$$

che chiaramente non è a rango pieno.