Soluzione Esercizi di Segnali e Sistemi - Capitolo 2
A.A. 2005/2006

Esercizio 2.1

i) L'equazione caratteristica é $s^2 + 3s + 2$. Le radici sono

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

da cui $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$.

ii) L'evoluzione libera si scrive nella forma

$$v_\ell(t) = ae^{-t} + be^{-2t}.$$

La sua derivata si scrive nella forma

$$\frac{dv_\ell}{dt} = -ae^{-t} + be^{-2t}.$$

Imponendo le condizioni iniziali $v_\ell(0) = 1$, $\frac{dv_\ell}{dt}\mid_{t=0} = 2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -a - 2b &= 2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ b &= -3 \end{aligned}$$

cioé

$$v_\ell(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t}$$

iii) La risposta impulsiva si scrive nella forma

$$h(t) = d_0\delta(t) + \left(d_1 e^{-t} + d_2 e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Siccome il sistema é strettamente proprio ($m = 0 < n = 2$) si ha che $d_0 = 0$. Calcolando le derivate della risposta impulsiva[1]:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left(-d_1 e^{-t} - 2d_2 e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t) + (d_1 + d_2)\delta(t)$$

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = \left(d_1 e^{-t} + 4d_2 e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t) + (-d_1 - 2d_2)\delta(t) + (d_1 + d_2)\delta_1(t)$$

e imponendo che

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 3\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = \frac{1}{3}u(t) = \frac{1}{3}\delta(t)$$

[1] Si ricordi di sfruttare la proprietá di campionamento dell'impulso $v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0)$.

si ottengono (si sfrutta l'indipendenza lineare dei segnali $\delta_{-1}(t)$, $\delta(t)$ e $\delta_1(t)$) le condizioni $d_1 + d_2 = 0$, $d_1 + 2d_2 = -1/3$ da cui $d_1 = 1/3$, $-d_2 = 1/3$. La risposta impulsiva é quindi della forma:

$$h(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t)$$

iv) La risposta forzata al segnale di ingresso $u(t) = (1+t)\delta_{-1}(t)$ si puó calcolare usando l'integrale di convoluzione

$$v_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{3}\int_0^t \left(e^{-\tau} - e^{-2\tau}\right)(1+t-\tau)\;d\tau$$

Con una serie ti passaggi (..noiosi..) si ottiene:

$$v_f(t) = \frac{1}{12}\left(e^{-2t} + 2t - 1\right)\delta_{-1}(t)$$

Una semplice verifica permette di constatare che

$$\frac{d^2 v_f(t)}{dt^2} + 3\frac{dv_f(t)}{dt} + 2v_f(t) = \frac{1}{3}(1+t)\delta_{-1}(t)$$

v) Il sistema é BIBO stabile perché le radici dell'equazione caratteristica hanno parte reale strettamente negativa.

Una verifica immediata porta a:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mid h(\tau) \mid \,d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \mid \tfrac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\delta_{-1}(t) \mid \,d\tau = \\
&= \int_0^{\infty} \tfrac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\,d\tau = \\
&= \tfrac{1}{3}\left(-e^{-t} + \tfrac{1}{2}e^{-2t}\right)\Big|_0^{+\infty} = \\
&= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.2

i) L'equazione caratteristica é $s^3 + 2s + s = s(s^2 + 2s + 1) = s(s+1)^2$. Le radici sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$.

ii) L'evoluzione libera si scrive nella forma

$$v_\ell(t) = a + be^{-t} + cte^{-t}.$$

Le sue derivate si scrivono nella forma

$$\frac{dv_\ell}{dt} = (c-b)e^{-t} - cte^{-t}$$

e

$$\frac{d^2 v_\ell}{dt^2} = (b-2c)e^{-t} + cte^{-t}$$

Imponendo le condizioni iniziali $v_\ell(0) = 1$, $\frac{dv_\ell}{dt}\mid_{t=0}= 2$, $\frac{d^2v_\ell}{dt^2}\mid_{t=0}= 0$

$$\begin{gathered} a+b=1 \\ c-b=2 \\ b-2c=0 \end{gathered}$$

da cui

$$\begin{gathered} a=5 \\ b=-4 \\ c=-2 \end{gathered}$$

cioé

$$v_\ell(t) = 5 - 4e^{-t} - 2te^{-t}$$

iii) La risposta impulsiva si scrive nella forma

$$h(t) = d_0\delta(t) + \left(d_1 + d_2e^{-t} + d_3te^{-t}\right)\delta_{-1}(t)$$

Siccome il sistema é strettamente proprio ($m = 1 < n = 3$) si ha che $d_0 = 0$. Calcolando le derivate della risposta impulsiva[2]:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \left((d_3 - d_2)e^{-t} - d_3te^{-t}\right)\delta_{-1}(t) + (d_1 + d_2)\delta(t)$$

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} = \left((d_2 - 2d_3)e^{-t} + d_3te^{-t}\right)\delta_{-1}(t) + (d_3 - d_2)\delta(t) + (d_1 + d_2)\delta_1(t)$$

$$\frac{d^3h(t)}{dt^3} = \left((3d_3 - d_2)e^{-t} - d_3te^{-t}\right)\delta_{-1}(t)+(d_2-2d_3)\delta(t)+(d_3-d_2)\delta_1(t)+(d_1+d_2)\delta_2(t)$$

e imponendo che

$$\frac{d^3h(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{dh(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} = \delta_1(t)$$

si ottengono (si sfrutta l'indipendenza lineare dei segnali δ_{-1}, $\delta(t)$, $\delta_1(t)$ e $\delta_2(t)$) le condizioni $d_1 + d_2 = 0$, $d_3 + d_2 + 2d_1 = 0$, $d_1 = 0$ da cui $d_2 = 0$ e $d_3 = 1$,

La risposta impulsiva é quindi della forma:

$$h(t) = te^{-t}\delta_{-1}(t)$$

Osservazione: si sarebbe potuto stabilire a priori che il modo $m(t) = cost$ non compare nella risposta impulsiva perché l'equazione si puó ridurre a:

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + 2\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = u(t) = \delta(t) \tag{1}$$

dove si é sfruttato il fatto che $h(0^-) = \frac{dh}{dt}\mid_{t=0^-}= \frac{d^2h}{dt^2}\mid_{t=0^-}= 0$ e $u(0^-) = 0$. L'equazione omogenea associata alla (1) non ammette il modo $m(t) = cost$ come

[2]Si ricordi di sfruttare la proprietá di campionamento dell'impulso $v(t)\delta(t - t_0) = v(t_0)\delta(t - t_0)$.

soluzione. Osservare invece che la stessa cosa non vale per la risposta libera in quanto il passaggio (per integrazione) dall'equazione differenziale originale alla (1) richiederebbe l'introduzione delle condizioni iniziali, non nulle per la risposta libera. Si giungerebbe ad una equazione non omogoena, in cui il termine forzante dipende dalle condizioni iniziali. Per esercizio considerare il seguente esempio semplificato:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}$$

Verificare che per il calcolo della risposta libera a partire dalle condizioni iniziali $v_\ell(0)$ *e* $\frac{dv_\ell(t)}{dt}\mid_{t=0}$ *si deve risolvere l'equazione*

$$\frac{dv_\ell(t)}{dt} + v_\ell(t) = v_\ell(0) + \frac{dv_\ell(t)}{dt}\mid_{t=0} .$$

Si osservi in particolare che se si cercasse una soluzione di

$$\frac{dv_\ell(t)}{dt} + v_\ell(t) = 0,$$

necessariamente della forma $v_\ell(t) = ae^{-t}$ *si avrebbe* $v_\ell(0) = a = -\frac{dv_\ell}{dt}\mid_{t=0}$. *Quindi non sarebbe possibile imporre arbitrariamente entrambe le condizioni su* $v_\ell(0)$ *e* $\frac{dv_\ell}{dt}\mid_{t=0}$.

iv) La risposta forzata al segnale di ingresso $u(t) = sin(t)\delta_{-1}(t)$ si puó calcolare usando l'integrale di convoluzione

$$v_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \left(\tau e^{-\tau}\right) sin(t-\tau)\,d\tau$$

e usando la formula per il seno

$$sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} = \Im m\{e^{jt}\}$$

Si calcola quindi la risposta $z(t)$ al segnale e^{jt}

$$z(t) = \int_0^t \left(\tau e^{-\tau}\right) e^{j(t-\tau)}\,d\tau$$

e poi si usa il fatto, dato che la risposta impulsiva é reale

$$\begin{aligned}
\Im m\{z(t)\} &= \Im m\left\{\int_0^t \left(te^{-\tau}\right) e^{j(t-\tau)}\,d\tau\right\} \\
&= \int_0^t \Im m\left\{\left(\tau e^{-\tau}\right) e^{j(t-\tau)}\right\}\,d\tau = \\
&= \int_0^t \left(\tau e^{-\tau}\right) \Im m\left\{e^{j(t-\tau)}\right\}\,d\tau = \\
&= \int_0^t \left(\tau e^{-\tau}\right) sin(t-\tau)\,d\tau = v_f(t)
\end{aligned}$$

Quindi si ha $v_f(t) = \Im m\{z(t)\}$.

Dopo dei calcoli noiosi si ottiene:

$$v_f(t) = \frac{e^{-t} + te^{-t} - cos(t)}{2}\delta_{-1}(t)$$

Si osservi che stiamo studiando la risposta ad un segnale sinusoidale (moltiplicato per un gradino). Usando la convenzione del libro di testo si pudecomporre la risposta ad un segnale fasoriale o sinusoidale causale in *risposta in regime transitorio* e *risposta in regime permanente* entrambe nulle per $t < 0$, si ha che $v_f(t) = v_{rt}(t) + v_{rp}(t)$ con

$$v_{rt}(t) = \frac{e^{-t} + te^{-t}}{2}\delta_{-1}(t)$$

che tende a zero per $t \to +\infty$ e

$$v_{rp}(t) = -\frac{1}{2}cos(t)\delta_{-1}(t).$$

v) Il sistema

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

é descritto dalla stessa riposta impulsiva. (Verificare)

vi) Il sistema é BIBO stabile (basta verificare l'assoluta integrabilitá della risposta impulsiva; senza fare i conti basta osservare che la risposta impulsiva contiene, pesati con coefficiente non nullo, solo modi associati ad autovalori a parte reale strettamente negativa). Si osservi che in questo caso il sistema NON é asintoticamente stabile perché l'evoluzione libera

$$v_\ell(t) = a + be^{-t} + cte^{-t}$$

non converege a zero (per $t \to +\infty$) per ogni scelta delle condizioni iniziali. (Per esempio, con le condizioni iniziali dell'esercizio $v_\ell(t) = 5 - 4e^{-t} - 2te^{-t} \to 5 \neq 0$ per $t \to +\infty$.

OSSERVAZIONE: Il fatto che alcuni modi non compaiono della risposta impulsiva non é un caso. Si studierá questo fenomeno piú in dettaglio nel seguito del corso

Esercizio 2.3

i) Basta osservare che

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} \delta_{-1}(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{-1}(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

per cui la risposta impulsiva é $h(t) = \delta_{-1}(t)$.

ii) Il sistema non é BIBO stabile perché la risposta impulsiva NON é assolutamente integrabile.

Si osservi, ad esempio, che l'uscita corrispondente al segnale di ingersso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ é $v(t) = t\delta_{-1}(t)$ che palesemente non é limitata per $t \in [0, +\infty)$.

Esercizio 2.4

i) Basta osservare che

$$v(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2} u(\tau)d\tau = \int_{t-T/2}^{t+T/2} \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right)u(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t-\tau}{T}\right)u(\tau)d\tau$$

per cui la risposta impulsiva é $h(t) = \frac{1}{T}\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$.

Domanda: questo sistema é causale?

ii) Il sistema é BIBO stabile perché la risposta impulsiva é assolutamente integrabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|\, d\tau = 1$$

Esercizio 2.5

i) Affinché la risposta libera sia $v_\ell(t) = 4e^{-t}sin\left(t + \frac{\pi}{6}\right) = 2je^{-j\frac{\pi}{6}}e^{-t-jt} - 2je^{j\frac{\pi}{6}}e^{-t+jt}$ l'equazione caratteristica deve ammettere $\lambda_1 = -1 + j$ e $\lambda_2 = -1 - i$ come radici, ad esempio:

$$(s + 1 - j)(s + 1 + j) = s^2 + 2s + 2$$

L'equazione omogenea associata é quindi:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 2\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = 0. \tag{2}$$

Una possibile equazione differenziale che ammette la (2) come equazione omogenea é

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 2\frac{dv(t)}{dt} + 2v(t) = u(t)$$

ii) Le radici dell'equazione caratteristica sono a parte reale strettamente negativa e quindi il sistema é asintoticamente stabile.

iii) Per trovare la risposta in regime permanente all'ingresso

$$u(t) = (sin(t) - cos(t))\, \delta_{-1}(t)$$

conviene utilizzare il metodo della risposta in frequenza. Prima di tutto osserviamo che

$$u(t) = \left(\mathfrak{Im}\{e^{jt}\} - \mathfrak{Re}\{e^{jt}\}\right)\delta_{-1}(t)$$

Di conseguenza, se indichiamo con $z_{rp}(t)$ l'uscita in regime permanente corrispondente al segnale di ingresso e^{jt}, allora si ha

$$v_{rp}(t) = (\mathfrak{Im}\{z_{rp}(t)\} - \mathfrak{Re}\{z_{rp}(t)\})\, \delta_{-1}(t) \tag{3}$$

Come é noto, la risposta $z_{rp}(t)$ in regime permanente al segnale $e^{jt}\delta_{-1}(t)$ si ottiene dalla relazione:

$$z_{rp}(t) = H(j)e^{jt}\delta_{-1}(t)$$

dove $H(j)$ é la risposta in frequenza calcolata per $\omega = 1$

$$H(j) = \left[\frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega + 2} \right]_{|\omega=1} = \frac{1-2j}{5}.$$

Di conseguenza

$$z_{rp}(t) = \frac{1-2j}{5} e^{jt} \delta_{-1}(t) = \frac{1}{5} \left(cos(t) + 2sin(t) + jsin(t) - 2jcos(t) \right) \delta_{-1}(t)$$

che, usando la (3), fornisce

$$\begin{aligned} v_{rp}(t) &= \tfrac{1}{5} \left(sin(t) - 2cos(t) - cos(t) - 2sin(t) \right) \delta_{-1}(t) \\ &= -\tfrac{1}{5} \left(sin(t) + 3cos(t) \right) \delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

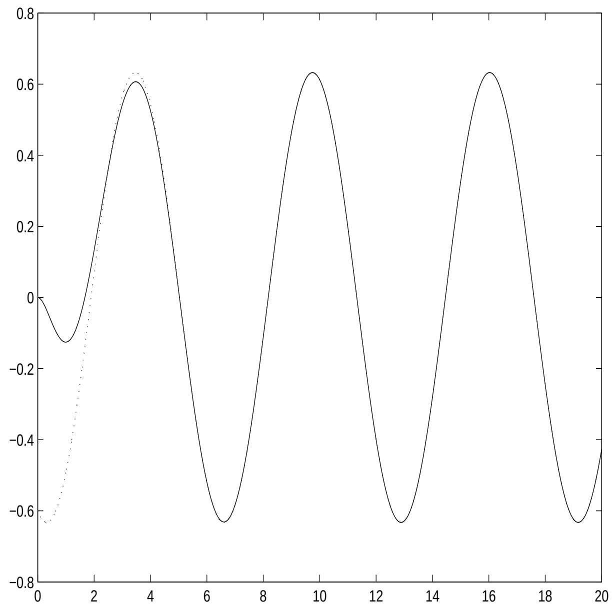

Figure 1: Linea punteggiata: risposta in regime permanente. Linea continua: risposta del sistema in “transitorio”. Si vede che dopo circa 4 secondi le due curve sono indistinguibili.