Soluzione Esercizi di Segnali e Sistemi - Capitolo 1
A.A. 2005/2006

Esercizio 1.1

i) dominio discreto - ampiezza discreta

ii) dominio discreto - ampiezza continua

iii) dominio continuo - ampiezza continua

iv) dominio discreto - ampiezza continua

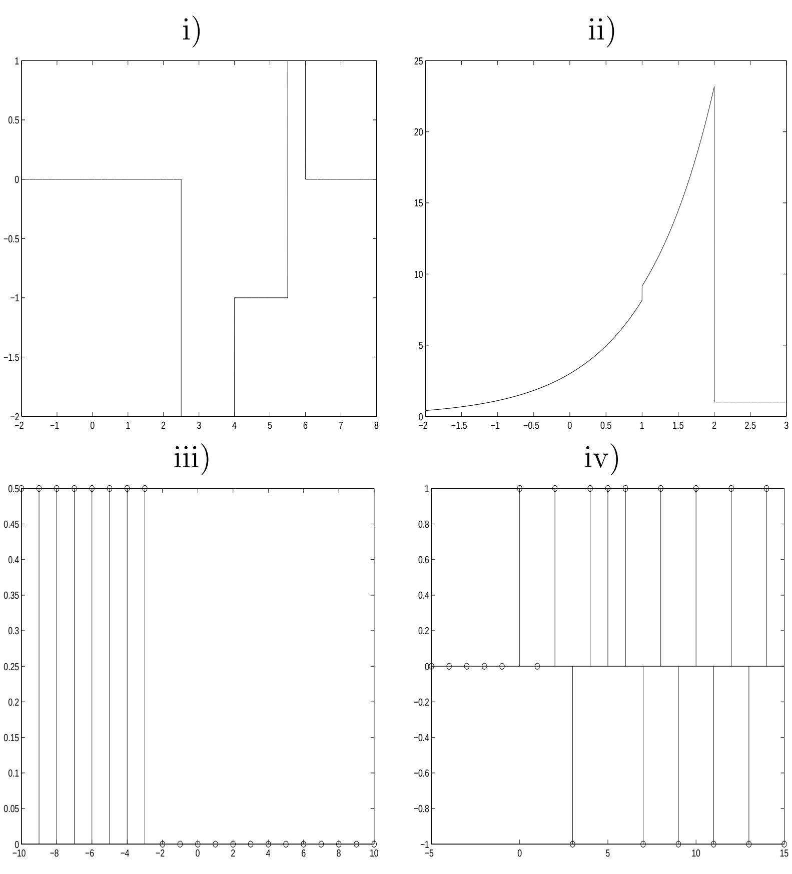
v) a) dominio continuo discerto - ampiezza continua

b) dominio discreto (e ampiezza continua) se rappresentata per pixel (campionata)

c) dominio discreto e ampiezza discreta se ogni pixel é rappresentato con un numero finito di livelli (quantizzata)

vi) dominio continuo - ampiezza continua

Esercizio 1.2



Esercizio 1.3

i) $v(k) = 3\Pi\left(\frac{k-12}{6}\right) = \sum_{h=9}^{15} 3\delta(k-h)$

ii) $v(k) = 2\Pi\left(\frac{k}{6}\right) + 5\Pi\left(\frac{k-15}{6}\right) = \sum_{h=-3}^{3} 2\delta(k-h) + \sum_{h=12}^{18} 5\delta(k-h)$

Esercizio 1.4

i) $v(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{4}\right) - \Pi\left(t-3/2\right) - \Pi\left(t+3/2\right) = 2\Pi\left(\frac{t}{2}\right) + \Pi\left(t-3/2\right) + \Pi\left(t+3/2\right)$

ii) $v(t) = t\Pi\left(t-1/2\right) - t\Pi\left(t+1/2\right) = |t|\Pi\left(\frac{t}{2}\right)$

iii) $v(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \Pi\left(\frac{t-(2kT+T/2)}{T}\right)$

Esercizio 1.5

Se scelgiamo $v^*(t) := v(t+t_0)$ allora

$$v^*(t-t_0)\delta_{-1}(t-t_0) = v((t-t_0)+t_0)\delta_{-1}(t-t_0) = v(t)\delta_{-1}(t-t_0)$$

Esercizio 1.6

i) Il segnale esponenziale é periodico di periodo T dato dalla relazione $T := \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2\pi f_0} = \frac{1}{f_0}$

$$\mathcal{E}_v = \int_{-\infty}^{+\infty} |v(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 \, dt = +\infty$$

$$\mathcal{P}_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2 \, dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 \, dt = A^2$$

ii) Si definisca come sopra $T := \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2\pi f_0} = \frac{1}{f_0}$

L'esercizio si puó fare senza fare i conti usando il risultato precedente. Infatti:

$$|Ae^{j2\pi f_0 t+\phi}|^2 = A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi) + A^2 sin^2(2\pi f_0 t+\phi)$$

Ricordando poi che $sin(t) = cos(t-\pi/2)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} A^2 &= \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |Ae^{j2\pi f_0 t+\phi}|^2 \, dt = \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |Ae^{j2\pi f_0 t+\phi}|^2 = \\ &= \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} [A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi) + A^2 sin^2(2\pi f_0 t+\phi)] \, dt = \\ &= 2\left(\tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi) \, dt\right) \end{aligned} \tag{1}$$

L'ultimo passaggio segue dal fatto che l'integrale in un periodo (anzi, in due visto che il quadrato di $sin(u)$ e $cos(u)$ hanno perdiodo π) non dipende dal particolare valore t_0 scelto e quindi

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi) \, dt &= \tfrac{1}{T}\int_{t_0-T/4}^{t_0-T/4+T} A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi) \, dt \\ &= \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi-\pi/2) \, dt = \\ &= \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 sin^2(2\pi f_0 t+\phi) \, dt \end{aligned}$$

Mettendo insieme il primo e l'ultimo termine di (1) si ottiene:

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi)\,dt = \frac{A^2}{2}$$

Volendo invece fare i conti,

$$\mathcal{P}_v \;=\; \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} |v(t)|^2\,dt = \tfrac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} A^2 cos^2(2\pi f_0 t+\phi)\,dt \qquad (2)$$

con un cambio di variabile $u = 2\pi f_0 t + \phi$ si ottiene

$$\mathcal{P}_v = \frac{1}{2\pi}\int_{u_0}^{u_0+2\pi} A^2 cos^2(u)\,du$$

dove $u_0 = 2\pi f_0 t_0 + \phi$. L'integrale (2) non dipende dal particolare valore t_0 scelto e quindi, senza perdita di generalitá, si puó prendere $u_0 = 0$.

Integrando per parti il $cos^2(u) = cos(u)cos(u)$ si ottiene

$$\int_0^{2\pi} cos(u)cos(u)\,du = sin(u)cos(u)|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} sin^2(u)\,du = \int_0^{2\pi}\left[1-cos^2(u)\right]\,du$$

da cui

$$2\int_0^{2\pi} cos(u)cos(u)\,du = \int_0^{2\pi} 1\,du = 2\pi$$

Si ottiene quindi

$$\mathcal{P}_v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A^2 cos^2(u)\,du = \frac{A^2}{2}$$

Chiaramente risulta $\mathcal{E}_v = +\infty$

iii) Si noti che k é libero di variare in $\mathbb{Z}$ e quindi si ottiene un segnale periodico con periodo $2T$ (disegnare il grafico per rendersene conto). L'energia é quindi infinita; la potenza media é data da:

$$\mathcal{P}_v = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} |v(t)|^2\,dt = \frac{1}{2T}\int_0^{2T} \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)|v(t)|^2\,dt = \frac{T}{2T} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 1.7

i)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_v &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2\,dt\\ &= \textstyle\int_{-\infty}^{-1} e^{2t+2}\,dt + \int_{-1}^{1} 1\,dt + \int_1^{\infty} e^{-2t+2}\,dt\\ &= e^2\tfrac{1}{2}e^{2t}|_{t=-\infty}^{t=-1} + 2 - e^2\tfrac{1}{2}e^{-2t}|_{t=1}^{t=\infty}\\ &= \tfrac{e^2}{2}e^{-2} + 2 + \tfrac{e^2}{2}e^{-2} = 2+1 = 3\end{aligned}$$

ii) Il segnale é periodico di periodo $N_0 = 8$. Di conseguenza la sua energia é infinita mentre la potenza media

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_v &= \tfrac{1}{N_0}\textstyle\sum_{k=k_0}^{k=k_0+N_0-1} |v(k)|^2\\ &= \tfrac{1}{8}\textstyle\sum_0^7 cos^2\left(\frac{\pi}{4}k\right) = \tfrac{1}{8}\left(1+1/2+0+1/2+1+1/2+0+1/2\right) = \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 1.8

Attenzione: per una mia svista l'esercizio risolto a Lezione il 7/11/2005 é diverso dall'esercizio proposto sul testo. Per completezza riporto la soluzione di entrambi:

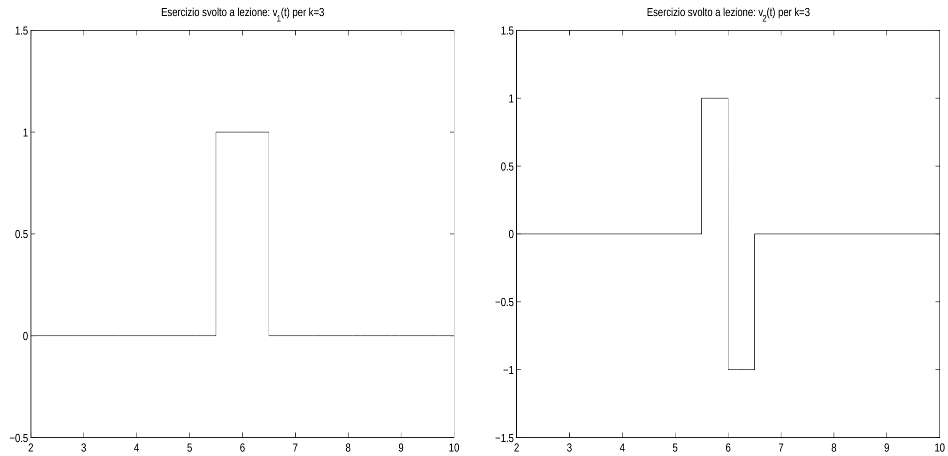


Figure 1: Esercizio svolto a lezione per $\bar{k} = 3$

ESERCIZIO RISOLTO A LEZIONE: Si calcolino energia e potenza dei seguenti segnali ($\bar{k} \in \mathbb{Z}$ fissato, si noti che i segnali v_1 e v_2 dipendono quindi dal particolare valore $\bar{k}$ scelto ma, come vedremo, energia e potenza non dipendono dal particolare valore di $\bar{k}$ scelto.):

i)
$$v_1(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} + 2\bar{k} \leq t \leq \frac{1}{2} + 2\bar{k} \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

ii)
$$v_2(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} + 2\bar{k} \leq t \leq 2\bar{k}, \\ -1, & 2\bar{k} \leq t \leq \frac{1}{2} + 2\bar{k} \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

iii) $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$.

Soluzione

$$\mathcal{E}_{v_1} = \int_{-\infty}^{\infty} |v_1(t)|^2 \, dt = \int_{2\bar{k}-1/2}^{2\bar{k}+1/2} (1)^2 \, dt = 1$$

$$\mathcal{E}_{v_2} = \int_{-\infty}^{\infty} |v_2(t)|^2 \, dt = \int_{2\bar{k}-1/2}^{2\bar{k}} (1)^2 \, dt + \int_{2\bar{k}}^{2\bar{k}+1/2} (-1)^2 \, dt = 1$$

$$\mathcal{E}_{v_1 v_2} = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(t)\bar{v}_2(t) \, dt = \int_{2\bar{k}-1/2}^{2\bar{k}} 1 \cdot 1 \, dt + \int_{2\bar{k}}^{2\bar{k}+1/2} 1 \cdot (-1) \, dt = 0$$

da cui, usando la relazione $\mathcal{E}_{v_1+v_2} = \mathcal{E}_{v_1} + \mathcal{E}_{v_2} + 2\mathcal{R}e\{\mathcal{E}_{v_1 v_2}\}$ si ottiene:

$$\mathcal{E}_{v_1+v_2} = 2$$

Poichá l'energia é finita la potenza media é nulla.

ESERCIZIO DEL TESTO: Si calcolino energia e potenza dei seguenti segnali i)

$$v_1(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} + 2k \le t \le \frac{1}{2} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

ii)

$$v_2(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} + 2k \le t \le 2k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & 2k \le t \le \frac{1}{2} + 2k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

iii) $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$.

Si noti che i segnali $v_1(t)$ e $v_2(t)$ si possono riscrivere nella forma:

$$v_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \cup_{k=-\infty}^{+\infty} [-\frac{1}{2} + 2k, \frac{1}{2} + 2k], \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in \cup_{k=-\infty}^{+\infty} [-\frac{1}{2} + 2k, 2k], \\ -1, & t \in \cup_{k=-\infty}^{+\infty} (2k, \frac{1}{2} + 2k], \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

Soluzione I segnali $v_1(t)$ e $v_2(t)$ si possono riscrivere rispettivamente nella forma:

$$v_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi\left(t - 2k\right)$$

$$v_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\Pi\left(\frac{t - (2k - 1/4)}{1/2}\right) - \Pi\left(\frac{t - (2k + 1/4)}{1/2}\right) \right]$$

Entrambi i segnali sono periodici di periodo $T = 2$ di conseguenza la loro energia é infinita. La potenza media, invece, si calcola da:

$$\mathcal{P}_{v_1} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} |v_1(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{+1/2} (1)^2 \, dt = \frac{1}{2}$$

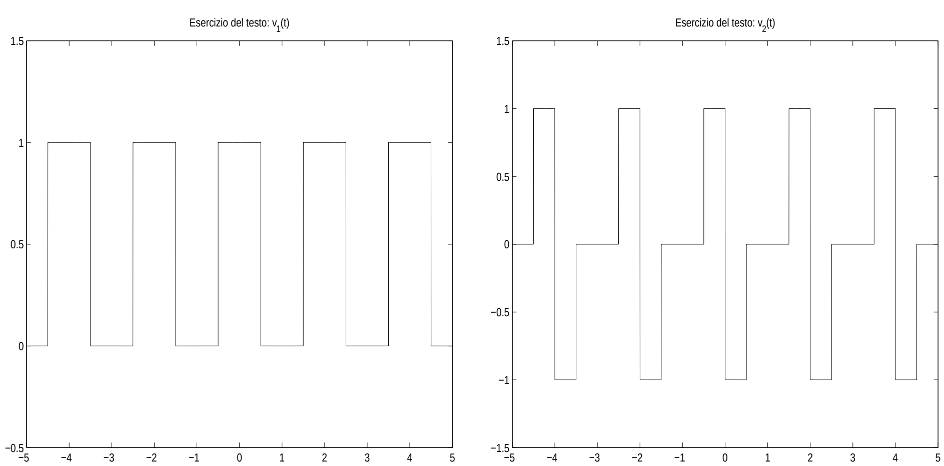


Figure 2: Esercizio 1.8 del testo

$$\mathcal{P}_{v_2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |v_1(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{0} (1)^2 \, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1/2} (-1)^2 \, dt = \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{P}_{v_1 v_2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v_1(t)\bar{v}_2(t) \, dt = \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{0} 1 \cdot 1 \, dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1/2} 1 \cdot (-1) \, dt = 0$$

da cui, usando la relazione (per segnali di potenza) $\mathcal{P}_{v_1+v_2} = \mathcal{P}_{v_1} + \mathcal{P}_{v_2} + 2\mathcal{R}e\{\mathcal{P}_{v_1 v_2}\}$ si ottiene:

$$\mathcal{P}_{v_1+v_2} = 1$$