Utilizzo della FFT per l'approssimazione della trasformata di Fourier

Alessandro Chiuso

Department of Information Engineering
University of Padova

DFT: Discrete Fourier Transform

Segnale Periodico a Tempo Discreto

$$v(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad v(k) = v(k-N)$$

Dove, per $h = -N/2, .., -1$, si definisce $V_h := V_{h+N}$,

DFT: Discrete Fourier Transform

Segnale Periodico a Tempo Discreto

$$v(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \qquad v(k) = v(k-N)$$

DFT

$$V_h = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} v(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}hk} \qquad v(k) = \sum_{h=0}^{N-1} V_h e^{j\frac{2\pi}{N}hk} = \sum_{h=-N/2}^{N/2-1} V_h e^{j\frac{2\pi}{N}hk}$$

Dove, per $h = -N/2, .., -1$, si definisce $V_h := V_{h+N}$,

Goal: approssimare trasformata di Fourier

Segnale a tempo continuo

$$y(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Goal: approssimare trasformata di Fourier

Segnale a tempo continuo

$$y(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Trasformata di Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} \, dt$$

Goal: approssimare trasformata di Fourier

Segnale a tempo continuo

$$y(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

Trasformata di Fourier

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft}\, dt$$

Ipotesi

1. y(t) a “durata” limitata $\Rightarrow$ $\quad y(t) = 0 \quad \forall t \notin [0, D]$
2. y(t) a “Banda” limitata $\Rightarrow$ $\quad Y(f) = 0 \quad \forall f \notin [-B, B]$

Passo 1: Ripetizione Periodica

Segnale "periodicizzato"

$$y_p(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y(t - kT)$$

REMARK: se $T > D \Rightarrow y_p(t) = y(t), \forall t \in [0, D]$.

Passo 1: Ripetizione Periodica

Segnale "periodicizzato"

$$y_p(t) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} y(t - kT)$$

REMARK: se $T > D \Rightarrow y_p(t) = y(t)$, $\forall t \in [0, D]$.

Trasformata di Fourier, $F := \frac{1}{T}$

$$Y_p(f) = \frac{1}{T}\mathrm{samp}_{1/T} Y(f) = F \sum_{h=-\infty}^{\infty} Y(hF)\delta(f - hF)$$

Passo 2: Espansione in Serie di Fourier

Serie di Fourier

$$y_p(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} y_{ph} e^{j2\pi \frac{h}{T} t}$$

$$y_{ph} = FY(hF)$$

Passo 2: Espansione in Serie di Fourier

Serie di Fourier

$$y_p(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} y_{ph} e^{j2\pi \frac{h}{T} t}$$

$$y_{ph} = FY(hF)$$

REMARK per ipotesi: $Y(f) = 0 \ \forall |f| > B$

Passo 2: Espansione in Serie di Fourier

Serie di Fourier

$$y_p(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} y_{ph} e^{j2\pi \frac{h}{T} t}$$

$$y_{ph} = FY(hF)$$

REMARK per ipotesi: $Y(f) = 0 \ \forall |f| > B$

$$\Downarrow$$

$$y_{ph} = FY(hF) = 0, \quad \forall h : |hF| > B$$

Passo 2: Espansione in Serie di Fourier

Serie di Fourier

$$y_p(t) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} y_{ph} e^{j2\pi \frac{h}{T} t}$$

$$y_{ph} = FY(hF)$$

REMARK per ipotesi: $Y(f) = 0 \; \forall |f| > B$

$$\Downarrow$$

$$y_{ph} = FY(hF) = 0, \quad \forall h : |hF| > B$$

$$\Downarrow$$

$$y_p(t) = F \sum_{h=-h_{max}}^{h_{max}-1} Y(hF) e^{j2\pi \frac{h}{T} t}$$

Passo 3: Campionamento

Campionamento del Segnale

$$v(k) = y_p(kT_c) = F \sum_{h=-h_{max}}^{h_{max}-1} Y(hF) e^{j2\pi \frac{h}{T} kT_c} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Scegliendo $N := \frac{T}{T_c}$ con $\frac{N}{2} > h_{max}$, i.e. $T_c < \frac{T}{2 * h_{max}} = \frac{1}{2 * h_{max} * F} < \frac{1}{2B}$:

Passo 3: Campionamento

Campionamento del Segnale

$$v(k) = y_p(kT_c) = F \sum_{h=-h_{max}}^{h_{max}-1} Y(hF) e^{j2\pi \frac{h}{T} kT_c} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Scegliendo $N := \frac{T}{T_c}$ con $\frac{N}{2} > h_{max}$, i.e. $T_c < \frac{T}{2 * h_{max}} = \frac{1}{2 * h_{max} * F} < \frac{1}{2B}$:

Confronto con DFT

$$V_h = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} hk} \qquad v(k) = \sum_{h=-N/2}^{N/2-1} V_h e^{j\frac{2\pi}{N} hk}$$

Passo 3: Campionamento

Campionamento del Segnale

$$v(k) = y_p(kT_c) = F \sum_{h=-h_{max}}^{h_{max}-1} Y(hF) e^{j2\pi \frac{h}{T} kT_c} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Scegliendo $N := \frac{T}{T_c}$ con $\frac{N}{2} > h_{max}$, i.e. $T_c < \frac{T}{2 * h_{max}} = \frac{1}{2 * h_{max} * F} < \frac{1}{2B}$:

Confronto con DFT

$$V_h = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} v(k) e^{-j\frac{2\pi}{N} hk} \qquad v(k) = \sum_{h=-N/2}^{N/2-1} V_h e^{j\frac{2\pi}{N} hk}$$

$$N := \frac{T}{T_c} \Rightarrow V_h = FY(hF) \Rightarrow Y(hF) = TV_h$$