

# Laboratorio del corso di Segnali e Sistemi

## Lezione 2

26 Novembre 2008

## Programma della lezione

- ▶ Rappresentazione di una funzione di trasferimento in MATLAB (funzioni `tf`, `tf2zp`, `zp2tf`)
- ▶ Calcolo e disegno di poli e zeri della fdt (funzioni `zero`, `pole`, `zplane`)
- ▶ Calcolo e simulazione della risposta nel tempo di un sistema LTI (funzioni `residue`, `step`, `impulse`, `lsim`)

## Funzione di trasferimento

Dalla teoria è noto che la trasformata di Laplace  $V_f(s)$  del segnale di uscita in evoluzione forzata,  $v_f(t)$ , è legato alla trasformata di Laplace del segnale di ingresso,  $u(t)$ , dalla relazione

$$V_f(s) = H(s)U(s)$$

$H(s)$ : **funzione di trasferimento (f.d.t.)** del sistema.

## Funzione di trasferimento

Per un sistema LTI descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$a_n \frac{d^n v(t)}{dt^n} + \dots + a_0 v(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

la fdt è una funzione razionale nella variabile  $s$

$$H(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1)$$

I coefficienti di tale funzione sono quelli della corrispondente equazione differenziale.

## Funzione di trasferimento - rappresentazione alternativa

Una rappresentazione alternativa della funzione di trasferimento è quella in cui numeratore e denominatore compaiono fattorizzati nel prodotto di termini di grado 1 (non necessariamente tutti distinti). In tal caso  $H(s)$  può essere scritta come

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (2)$$

I valori di  $s$  in corrispondenza dei quali  $H(s)$  tende a zero e ad infinito sono detti rispettivamente **poli** e **zeri** della f.d.t.

Se la funzione razionale  $H(s)$  è data attraverso una sua rappresentazione irriducibile, ovvero  $\nexists$  zeri comuni ai due polinomi  $n(s)$  e  $d(s)$ , allora

- ▶ zeri di  $H(s)$  = zeri di  $n(s)$
- ▶ poli di  $H(s)$  = zeri di  $d(s)$

## Funzione di trasferimento in MATLAB

Le funzioni di trasferimento vengono definite in MATLAB immagazzinando i coefficienti del numeratore e del denominatore in vettori.

Si consideri, per cominciare, una f.d.t nella forma (1)

$$H(s) = \frac{V_f(s)}{U(s)} = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}{a_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Tale fdt viene rappresentata in MATLAB immagazzinando i coefficienti di  $n(s)$  e  $d(s)$  in due vettori e facendo uso della funzione `tf`.

# Funzione di trasferimento in MATLAB

## Esempio

$$H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s}$$

$H(s)$  presenta 2 zeri in  $s = -j$  e  $s = j$  e 3 poli, in  $s = 0$ ,  $s = 1$  e  $s = -2$ .

### 1. Inserimento della f.d.t. in MATLAB

```
num = [1 0 1]; denom = [1 3 2 0];  
sys = tf(num, denom)
```

*Osservazione:* Si noti che vanno inseriti anche i coefficienti nulli!

### 2. Calcolo di poli e zeri della fdt e loro rappresentazione nel piano complesso

```
z=zero(sys); p=pole(sys); zplane(z,p);
```

## Funzione di trasferimento in MATLAB

*Osservazione:* Si presti attenzione all'utilizzo della funzione `zplane`

- ▶ `zplane(z,p)` con `z` e `p` vettori *colonna* fornisce una rappresentazione nel piano complesso degli zeri contenuti nel vettore `z` e dei poli contenuti nel vettore `p`
- ▶ `zplane(num,denom)` con `num` e `denom` vettori *riga* fornisce una rappresentazione nel piano complesso degli zeri e dei poli della fdt i cui coefficienti del numeratore sono contenuti nel vettore `num` e i cui coefficienti del denominatore sono contenuti nel vettore `denom`

# Funzione di trasferimento in MATLAB

Abbiamo visto che la fdt può alternativamente essere rappresentata in termini di zeri, poli e guadagno (cfr. 2)

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Come passare dalla rappresentazione (1) alla rappresentazione (2) e viceversa in MATLAB? Tramite le funzioni `tf2zp` e `zp2tf`

```
[z,p,k]=tf2zp(num,denom)  
[num,denom]=zp2tf(z,p,k)
```

Osservazione: alternativamente si può passare da una rappresentazione all'altra tramite le funzioni `roots` e `poly` viste la volta scorsa. Le funzioni `tf2zp` e `zp2tf` implementano la conversione tra le due rappresentazioni della fdt proprio facendo uso delle funzioni `roots` e `poly`.

# Risposta nel tempo di un sistema LTI

In MATLAB esistono due metodi per calcolare la risposta nel tempo di un sistema LTI

1. Metodo analitico: tramite la funzione `residue`
2. Metodo numerico: tramite le funzioni
  - `step`: consente di ricavare l'uscita di un sistema LTI con stato iniziale nullo ad un gradino unitario
  - `impz`: consente di ricavare l'uscita di un sistema LTI con stato iniziale nullo ad un impulso di ampiezza unitaria
  - `lsim`: consente di valutare la risposta di un sistema LTI ad un ingresso qualsiasi (ad esempio una sinusoide).

# Risposta nel tempo di un sistema LTI

**Esempio 1.** Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo causale descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{12}{s^2 + 8s + 12}$$

- 1)
  - a. Determinare la risposta del sistema ad un gradino unitario mediante il metodo “carta e penna” visto a lezione confrontando l’espansione in fratti semplici ottenuta a mano con quella ottenuta mediante il comando `residue` di Matlab.
  - b. Disegnare la risposta al gradino unitario ottenuta a mano mediante il comando `plot` e confrontare il grafico ottenuto con quello ottenuto mediante il comando `step`.
- 2) Ripetere il punto precedente nel caso in cui il segnale in ingresso sia un impulso di ampiezza unitaria (nel punto b. usare quindi il comando `impulse` al posto di `step`).

# Risposta nel tempo di un sistema LTI

1) a. Metodo “carta e penna”.

- La tf di Laplace  $V_f(s)$  del segnale in uscita in evoluzione forzata,  $v_f(t)$ , è legata alla tf di Laplace  $U(s)$  del segnale in ingresso,  $u(t)$ , dalla relazione

$$V_f(s) = H(s)U(s)$$

quindi

$$V_f(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{12}{s^2 + 8s + 12} = \frac{12}{s(s^2 + 8s + 12)}.$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

- Per determinare l'espressione dell'uscita nel dominio del tempo, è necessario *antitrasformare*  $V_f(s)$  tramite la tecnica di espansione in fratti semplici.

Notiamo che  $V_f(s)$  ha tre poli distinti  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -6$  e  $s_3 = -2$ . Dunque  $V_f(s)$  può essere riscritta come

$$V_f(s) = \frac{12}{s(s+6)(s+2)} = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+6} + \frac{C_3}{s+2}.$$

Essendo le radici semplici possiamo calcolare i coefficienti  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  come limiti

$$C_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{12}{s(s+6)(s+2)} \cdot s = 1$$

$$C_2 = \lim_{s \rightarrow -6} \frac{12}{s(s+6)(s+2)} \cdot (s+6) = \frac{1}{2}$$

$$C_3 = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{12}{s(s+6)(s+2)} \cdot (s+2) = -\frac{3}{2}$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

- Alternativamente i coefficienti dell'espansione in fratti semplici possono essere calcolati tramite MATLAB mediante il comando `residue`. Eseguendo il comando

» `[r,p,k]=residue(12,[1 8 12 0])`

ritroviamo esattamente i coefficienti  $C_1, C_2, C_3$  calcolati a mano  $\Rightarrow$  OK.

- Antitrasformando  $V_f(s)$  si ottiene che la risposta forzata del sistema al segnale di ingresso  $u(t) = \delta_{-1}(t)$  è data da

$$v_f(t) = \delta_{-1}(t) + \frac{1}{2}e^{-6t}\delta_{-1}(t) - \frac{3}{2}e^{-2t}\delta_{-1}(t).$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

b. Disegniamo il grafico della risposta al gradino unitario mediante il comando `step` e confrontiamo il grafico ottenuto con il grafico della risposta al gradino ottenuta a mano

```
» num=12; denom=[1 8 12];  
» step(num,denom)  
» hold on  
» t=0:0.01:3;  
» v=1+0.5*exp(-6*t)-1.5*exp(-2*t);  
» plot(t,v,'m')
```

I due grafici sono perfettamente sovrapposti  $\Rightarrow$  OK.

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

2) a. Metodo “carta e penna”.

- Tf di Laplace del segnale in uscita in evoluzione forzata

$$\begin{aligned} V_f(s) &= H(s)U(s) = H(s) \cdot 1 = \frac{12}{s^2 + 8s + 12} = \\ &= \frac{12}{(s+6)(s+2)} = \frac{C_1}{s+6} + \frac{C_2}{s+2}. \end{aligned}$$

- I coefficienti  $C_1$  e  $C_2$  possono essere calcolati “a mano” come

$$\begin{aligned} C_1 &= \lim_{s \rightarrow -6} \frac{12}{(s+6)(s+2)} \cdot (s+6) = -3 \\ C_2 &= \lim_{s \rightarrow -2} \frac{12}{(s+6)(s+2)} \cdot (s+2) = 3 \end{aligned}$$

oppure in MATLAB mediante il comando

» [r,p,k]=residue(12,[1 8 12])

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

- Antitrasformando si ottiene che la risposta del sistema all'impulso è data da

$$v_f(t) = -3e^{-6t}\delta_{-1}(t) + 3e^{-2t}\delta_{-1}(t).$$

b. Disegniamo il grafico della risposta all'impulso mediante il comando `impulse` e confrontiamo il grafico ottenuto con il grafico della risposta all'impulso ottenuta a mano

```
» num=12; denom=[1 8 12];  
» impulse(num,denom)  
» hold on  
» t=0:0.01:3;  
» v=-3*exp(-6*t)+3*exp(-2*t);  
» plot(t,v,'m')
```

I due grafici sono perfettamente sovrapposti  $\Rightarrow$  OK.

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

**Esempio 2. (poli complessi)** Si ripeta l'esercizio 1. con

$$H(s) = \frac{116}{(s^2 + 8s + 116)}$$

**Soluzione. 1)** Risposta al gradino unitario.

- Tf di Laplace del segnale in uscita in evoluzione forzata

$$V_f(s) = H(s)U(s) = \frac{116}{(s^2 + 8s + 116)} \cdot \frac{1}{s}$$

$V_f(s)$  ha tre poli distinti:  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -4 + 10i$ ,  
 $s_3 = -4 - 10i$ .

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

- $V_f(s)$  può quindi essere riscritta come

$$\begin{aligned} V_f(s) &= \frac{116}{s(s - (-4 + 10i))(s - (-4 - 10i))} = \\ &= \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{(s - (-4 + 10i))} + \frac{C_3}{(s - (-4 - 10i))}. \end{aligned}$$

- I coefficienti  $C_1, C_2, C_3$  possono essere calcolati come limiti, ottenendo

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{5}i, \quad C_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{5}i$$

Alternativamente

» `format rat`

» `[r,p,k]=residue(116,[1 8 116 0])`

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

- Antitrasformando si ottiene che la risposta del sistema al gradino unitario è data da

$$\begin{aligned}v_f(t) &= \left[ 1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{5}i \right) e^{(-4+10i)t} + \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{5}i \right) e^{(-4-10i)t} \right] \delta_{-1}(t) \\ &= \left[ 1 + e^{-4t} \left( -\cos(10t) - \frac{2}{5} \sin(10t) \right) \right] \delta_{-1}(t).\end{aligned}$$

Confronto con il grafico della risposta al gradino ottenuta mediante il comando step:

```
» num=116; denom=[1 8 116];  
» step(num,denom)  
» hold on  
» t=0:0.01:1.5;  
» v=1+exp(-4*t).*(-cos(10*t)-2/5*sin(10*t));  
» plot(t,v,'m')
```

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

### 2) Risposta all'impulso.

- Tf di Laplace del segnale in uscita in evoluzione forzata

$$V_f(s) = H(s)U(s) = H(s) = \frac{116}{(s^2 + 8s + 116)}$$

Poli di  $V_f(s)$ :  $s_1 = -4 + 10i$ ,  $s_2 = -4 - 10i$ .  $V_f(s)$  può quindi essere riscritta come

$$\begin{aligned} V_f(s) &= \frac{116}{(s - (-4 + 10i))(s - (-4 - 10i))} = \\ &= \frac{C_1}{(s - (-4 + 10i))} + \frac{C_2}{(s - (-4 - 10i))}. \end{aligned}$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

- Calcolando i limiti risulta

$$C_1 = -\frac{29}{5}i, \quad C_2 = \frac{29}{5}i.$$

Alternativamente

» `format rat`

» `[r,p,k]=residue(116,[1 8 116])`

- Antitrasformando si ottiene che la risposta del sistema al gradino unitario è data da

$$\begin{aligned} v_f(t) &= -\frac{29}{5}ie^{(-4+10i)t}\delta_{-1}(t) + \frac{29}{5}ie^{(-4-10i)t}\delta_{-1}(t) \\ &= \frac{58}{5}e^{-4t}\sin(10t)\delta_{-1}(t). \end{aligned}$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

Confronto con il grafico della risposta all'impulso ottenuta mediante il comando `impulse`:

```
» num=116; denom=[1 8 116];  
» impulse(num,denom)  
» hold on  
» t=0:0.01:1.5;  
» v=58/5*exp(-4*t).*sin(10*t);  
» plot(t,v,'m')
```

**Osservazione:** Il sistema dell'Esempio 2. ha poli complessi che, al contrario del caso di soli poli reali, danno luogo ad una oscillazione nella risposta.

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

**Esempio 3.** Si consideri il sistema dinamico SISO a tempo continuo descritto dalla seguente fdt

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}.$$

a. Si determini la risposta,  $v(t)$ , del sistema in corrispondenza all'ingresso

$$u(t) = (\sin(t) - \cos(t)) \delta_{-1}(t)$$

evidenziando le componenti di regime transitorio,  $v_{rt}(t)$ , e permanente,  $v_{rp}(t)$ .

b. Si disegni il grafico della  $v(t)$  ottenuta e lo si confronti con il risultato fornito dalla funzione `lsim` di MATLAB.

# Risposta nel tempo di un sistema LTI

a. La risposta all'impulso del sistema è data da

$$h(t) = e^{-t} \sin(t) \delta_{-1}(t)$$

Si vuole calcolare la risposta forzata del sistema caratterizzato da risposta all'impulso  $h(t)$  al segnale in ingresso  $u(t)$ . Sappiamo che la risposta di un sistema ad un ingresso fasoriale o sinusoidale causale può essere decomposta in

- ▶ risposta in regime transitorio e
- ▶ risposta in regime permanente

si ha cioè

$$v_f(t) = v_{rp}(t) + v_{rt}(t).$$

# Risposta nel tempo di un sistema LTI

Al fine di calcolare tale risposta si osservi che il segnale in ingresso può essere riscritto come

$$u(t) = (\Im \{e^{jt}\} - \Re \{e^{jt}\}) \delta_{-1}(t).$$

Di conseguenza, se indichiamo con

- ▶  $z_{rp}(t)$  la risposta in regime permanente corrispondente al segnale di ingresso  $e^{jt}$
- ▶  $z_{rt}(t)$  la risposta in regime transitorio corrispondente al segnale di ingresso  $e^{jt}$

le risposte in regime permanente e transitorio all'ingresso  $u(t)$  possono essere scritte come

$$v_{rp}(t) = (\Im \{z_{rp}(t)\} - \Re \{z_{rp}(t)\}) \delta_{-1}(t)$$

$$v_{rt}(t) = (\Im \{z_{rt}(t)\} - \Re \{z_{rt}(t)\}) \delta_{-1}(t)$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

Calcoliamo quindi le risposte in regime permanente e transitorio al segnale  $e^{jt}\delta_{-1}(t)$  e da queste ricaviamo le risposte in regime permanente e transitorio al segnale di ingresso  $u(t)$ .

La risposta in regime permanente al segnale  $e^{jt}\delta_{-1}(t)$  è data da

$$\begin{aligned} z_{rp}(t) &= H(j)e^{jt}\delta_{-1}(t) = \frac{1-2j}{5}e^{jt}\delta_{-1}(t) = \\ &= \frac{1}{5}(\cos(t) + 2\sin(t) + j\sin(t) - 2j\cos(t))\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

da cui si ottiene che la risposta in regime permanente al segnale  $u(t)$  è

$$\begin{aligned} v_{rp}(t) &= \frac{1}{5}(\sin(t) - 2\cos(t) - \cos(t) - 2\sin(t))\delta_{-1}(t) \\ &= -\frac{1}{5}(\sin(t) + 3\cos(t))\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

La risposta in regime transitorio al segnale  $e^{jt}\delta_{-1}(t)$  è data da

$$\begin{aligned}z_{rt}(t) &= - \int_t^\infty h(\tau) e^{j(t-\tau)} d\tau = - \int_t^\infty e^\tau \sin(\tau) e^{j(t-\tau)} d\tau = \\&= -e^{jt} \int_t^\infty e^{-\tau(1+j)} \sin(\tau) d\tau \\&= -e^{jt} \left[ \frac{e^{-\tau(1+j)} (-(1+j) \sin(t) - \cos(t))}{(-1-j)^2 + 1} \right]_t^{+\infty} \\&= -\frac{e^{-t}}{2j+1} (\sin(t) + \cos(t) + j \sin(t)) = \\&= -\frac{1}{5} e^{-t} (\cos(t) + 3 \sin(t)) + i \frac{1}{5} e^{-t} (2 \cos(t) + \sin(t))\end{aligned}$$

da cui si ottiene che la risposta in regime transitorio al segnale  $u(t)$  è

$$v_{rt}(t) = \frac{1}{5} e^{-t} (2 \cos(t) + \sin(t)) + \frac{1}{5} e^{-t} (\cos(t) + 3 \sin(t))$$

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

b.

- ▶ Disegniamo le risposte del sistema in regime permanente e transitorio al segnale d'ingresso  $u(t)$  appena calcolate usando la funzione `plot`
- ▶ Calcoliamo l'uscita del sistema in corrispondenza dell'ingresso  $u(t)$  tramite la funzione `lsim`
- ▶ Controlliamo che l'uscita calcolata mediante la funzione `lsim` risulti uguale alla somma delle risposte in regime permanente e transitorio disegnando entrambe le funzioni tramite il comando `plot`

Si riporta qui di seguito lo script MATLAB che implementa il punto b.

## Risposta nel tempo di un sistema LTI

```
clc; clear all; close all
t=[0:0.01:20];
u=sin(t)-cos(t);
v_lsim=lsim(num,den,u,t);
plot(t,v_lsim,'LineWidth',2); hold on
H_w0=1/polyval([1 2 2],i)
v_trans=1/5*exp(-t).*(2*cos(t)+sin(t))+...
1/5.*exp(-t).*(cos(t)+3*sin(t));
v_perm=-1/5*(sin(t)+3*cos(t));
plot(t,v_perm,'m','LineWidth',2)
plot(t,v_trans,'g','LineWidth',2)
v = v_perm + v_trans;
plot(t,v,'c','LineWidth',2); grid on;
title('System response to the input signal u(t)')
xlabel('Time[sec]'); ylabel('Amplitude');
legend('v_lsim','v_perm','v_trans','v')
```