Esercitazione di
IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI ED ANALISI DEI DATI
7 maggio 2015

Esercizio 1. Si consideri il modello lineare nei parametri

$$y(t) = \phi^\top(t)\theta + e(t) \quad t \in \mathbb{Z}$$

dove $e(t)$ è un rumore bianco, a media nulla e varianza σ_e^2. Come esempio si considerino i seguenti due casi:

1. sia $u(t)$ un ingresso noto (da scegliere opportunamente) e sia $\phi^\top(t) = [u(t-1),\ u(t-2),\ ..., u(t-m)]$, cioè si consideri un modello Output Error (OE) di tipo FIR (Finite Impulse Response).
2. sia $\phi^\top(t) = [y(t-1),\ y(t-2),\ ..., y(t-n)]$, cioè si consideri un modello $AR(n)$ per $y(t)$.

Per entrambi le scelte di $\phi(t)$:

1. Si fissi un vettore di parametri $\theta = \theta_0$ a scelta. Attenzione che nel caso del modello AR(n) i coefficienti θ_0 devono garantire che il modello sia stabile, mentre per il modello FIR non ci sono problemi di stabilirà (*perchè?*). Si generi una sequenza di dati $y(t)$, $\phi(t)$, $t = 0, ..., N$ (N è il numero totale di dati, fissatelo a piacere)
2. Si calcoli lo stimatore ai minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ di θ.
3. Si ripeta $T = 500$ volte l'esperimento di generazione dei dati al punto 1) (mantenendo fissi il parametro "vero" θ_0 e l'ingresso $u(t)$ quando presente) e di stima dei parametri al punto 2) (Questa ripetizione di esperimenti sotto le *stesse* condizioni sperimentali si chiama "esperimento Monte Carlo"; indovinate da dove viene il nome?). Siano $\hat{\theta}_{LS}^{(i)}$, $i = 1, .., T$ gli stimatori ai minimi quadrati di θ_0 alla ripetizione $i-$esima dell'esperimento.
4. Si calcoli la varianza (teorica) dello stimatore

   $$Var\{\tilde{\theta}_{LS}\} = \sigma_e^2 \left(\sum_{t=0}^{N} \phi(t)\phi^\top(t) \right)^{-1}$$

   e la si confronti con l'errore di stima ottenuto sui dati $\tilde{\theta}_{LS}^{(i)} := \hat{\theta}_{LS}^{(i)} - \theta_0$. (Ciascuno dei $\tilde{\theta}_{LS}^{(i)}$ si può pensare come una realizzazione indipendente di una variabile aleatoria con media nulle e varianza $Var\{\tilde{\theta}_{LS}\}$, quindi la varianza campionaria dei $\tilde{\theta}_{LS}^{(i)}$ dovrebbe essere simile alla varianza "teorica" $Var\{\tilde{\theta}_{LS}\}$.
5. Si scriva lo stimatore ai minimi quadrati di θ utilizzando l'algoritmo dei minimi quadrati ricorsivi.
6. Si scriva un filtro di Kalman per stimare in maniera ricorsiva il parametro vettoriale θ.
7. Si confrontino i risultati dei punti 5) e 6)