Esercitazione di
IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI ED ANALISI DEI DATI
30 marzo 2015

Esercizio 1.

Utilizzando il comando `rand.m` di Matlab, generate una variabila aleatoria X con distribuzione di probabilità

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0$$

Suggerimento: si usi il fatto che $F_X(x) = P[X \leq x]$. *Quindi, se* $Y \sim \mathcal{U}([0,1])$ *e* $X = F_X^{-1}(Y)$, *allora:*

$$P[X \leq x] = P[F_X^{-1}(Y) \leq x] = P[Y \leq F_X(x)] = F_Y(y)_{|y=F_X(x)} = F_X(x)$$

dove la second uguaglianza deriva dal fatto che $F_X(x)$ *è una funzione monotona e l'ultima eguaglianza deriva dal fatto che la funzione di distribuzione di un variabile aleatoria uniforme ela funzione identità.*

1. Siano x_i, $i = 1, ..., N$ i.i.d. con distribuzione $F_X(x)$, calcolare la media campionaria e confrontarla con la media $\mathbb{E}x$ (da calcolare come da definizione)

2. Siano x_{ij}, $i = 1, ..., N$, $j = 1, ..., M$ i.i.d. con distribuzione $F_X(x)$. Si definiscano le variabili $s_i := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} x_{i,j}$ e si disegni l'istogramma (usando il comando `hist` di Matlab) della sequenza s_i. Se N è grande l'istogramma dovrebbe assomigliare alla densità di probabilità della variabile $s := \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} x_j$; utlizzando il limite centrale (CLT) $s \approx \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Calcolare m e σ^2 e disegnare la densità "sovrapposta" all'istogramma. Verificare che per N ed M grandi si ottiene quanto previsto dal CLT.

Esercizio 2.

Data una funzione di trasferimento (causale e stabile, con inversa causale e stabile)

$$H(z) = K\frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

1. Si generi un processo $\epsilon(t)$ di rumore bianco Gaussiano a media 0 e varianza unitaria (basta usare la funzione `randn` di Matlab); Si disegni l'istogramma del segnale $\epsilon(t)$ e lo si confronti con la densità di una Gaussiana $\mathcal{N}(0, 1)$.

2. si filtri $\epsilon(t)$ con il filtro $H(z)$ ottenendo il processo $y(t)$. Si disegni il grafico dello spettro del segnale $y(t)$ e la realizzazione del processo $y(t)$ (su due grafici diversi). Si ripeta l'operazione per diverse scelte di poli p_i, zeri z_i e guadagno K.

3. Si costruisca il predittore ad un passo di $y(t)$ utilizzando la formula vista a lezione e si confronti il risultato con la funzione `predict` di Matlab.

4. Si calcoli l'errore di predizione $e(t) := y(t) - \hat{y}(t|t-1)$, la sua varianza campionaria

$$\hat{\sigma}_e^2 := \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e^2(t)$$

e si confronti la varianza campionaria con quella teorica σ_e^2. (Come si calcola? Fare per esercizio)

5. Si scelga una funzione di trasferimento "sbagliata" $H_2(z) \neq H(z)$, si calcoli (usando le stesse $y(t)$ generate sopra), la predizione con questa funzione di trasferimento sbagliata. Si disegni un grafico con il segnale $e_2(t) := y(t) - \hat{y}_2(t|t-1)$, si calcoli la sua varianza campionaria e si riportino sullo stesso grafico le due rette parallele all'asse delle ascisse con ordinata $\pm 2\hat{\sigma}_e$ dove $\hat{\sigma}_e^2$ è stata calcolata al punto 1. Cosa si deduce? Si disegni l'istogramma del segnale $e_2(t)$ e lo si confronti con la densità di una Gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$.