COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
7 luglio 2017

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Teoria 1. Con riferimento ad una equazione alle differenze lineare a coefficienti costanti

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i)$$

si **ricavi** l'espressione generale della risposta impulsiva.

Teoria 2. Si diano le definizioni di Serie e Trasformata di Fourier. Si discuta l'utilizzo della serie/trasformata di Fourier nello studio dei sistemi lineari tempo invarianti.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
7 luglio 2017

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 - 1100s + 100000}{(s^2+s+1)s^2}$$

Esercizio 2.[9 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

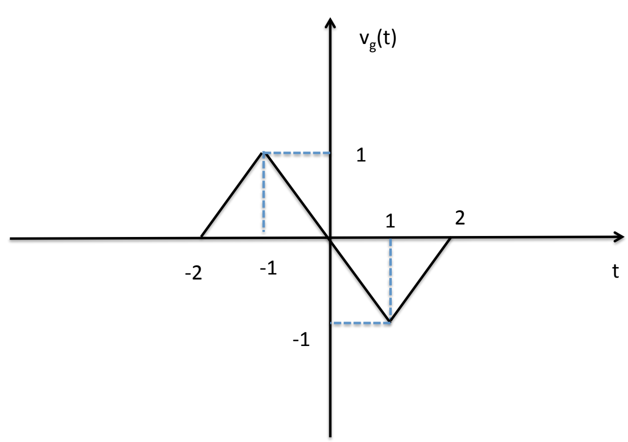
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (3+a^2)\frac{dy(t)}{dt} + 4ay(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+, \quad a \in \mathbb{R}.$$

i) Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in \mathbb{R}$.

ii) Per $a = 0$, si determini la risposta impulsiva del sistema.

iii) Per $a = 0$, si determini la risposta del sistema con condizioni iniziali $y(0^-) = 0$ e $\frac{dy(t)}{dt}_{|t=0^-} = 1$ ed ingresso $u(t) = 2\delta_{-1}(t-2)$.

Esercizio 3. [6 punti] Si consideri il segnale generatore disegnato in figura



Segnale generatore $v_g(t)$ (linea nera continua)

1. Si calcolino i coefficienti di Fourier del segnale $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_g(t-10k)$.

2. Assumendo che il segnale $u(t)$ sia la tensione di ingresso di un filtro RC, si scelgano, se possibile, valori di R e C in modo che le componenti del segnale a frequenza 1 Hz vengano attenuate, in ampiezza, esattamente di un fattore 2.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(s) = \frac{s^2 - 1100s + 100000}{(s^2 + s + 1)s^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{100000}{(j\omega)^2} \frac{\left(1 - \frac{j\omega}{1000}\right)\left(1 - \frac{j\omega}{100}\right)}{(1 + 2j0.5\omega - \omega^2)}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

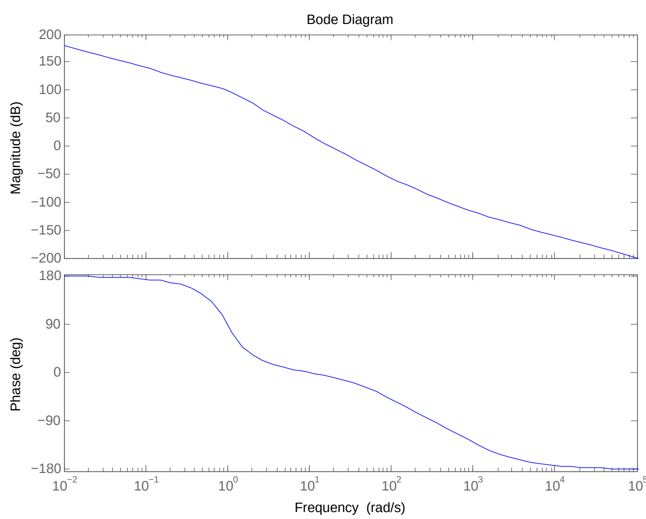


Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Il polinomio caratteristico del sistema è:

$$p(s) = s^2 + (3 + a^2)s + 4a$$

Utilizzando la regola di Cartesio, possiamo dire che le radici sono a parte reale negativa se e solo se tutti i coefficienti sono dello stesso segno, e quindi il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$a > 0 \qquad 3 + a^2 > 0$$

e quindi se e solo se $a > 0$.

Per la BIBO stabilità possiamo calcolare la funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2 + (3 + a^2)s + 4a}$$

Ovviamente per $a > 0$ il sistema è asintoticamente stabile e quindi anche BIBO stabile. L'unico altro caso in cui si può avere BIBO stabilità (senza la stabilità asintotica) si verifica se ci sono cancellazioni di radici a parte reale negativa in $H(s)$ (e i poli di $H(s)$ sono a parte reale negativa). L'unica cancellazione si può verificare se 1 (la radice del polinomio a numeratore) è anche radice di $p(s) = s^2 + (3 + a^2)s + 4a$ e quindi se $p(1) = 1 + (3 + a^2) + 4a = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2 = 0$. Questo può succedere se $a = -2$. Sotto questa condizione il polinomio caratteristico diventa

$$p(s) = [s^2 + (3 + a^2)s + 4a]_{a=-2} = s^2 + 7s - 8$$

Senza calcolare le radici, poichè ci sono una permanenza ed una variazione di segno nei coefficienti, una delle due radici è a parte reale negativa ed una positiva. Poichè la radice a parte reale positiva è 1 (per costruzione), l'altra radice di $p(s)$ ha parte reale negativa. Quindi, $p(s) = (s - 1)(s - \lambda)$ con $\lambda < 0$ (basta fare la divisione per verificare che $\lambda = -8$.)

Di conseguenza

$$H(s)_{|a=-2} = \frac{s-1}{(s-1)(s-\lambda)} = \frac{1}{s-\lambda} \qquad \lambda < 0$$

e quindi il sistema è BIBO stabile anche per $a = -2$. In conclusione il sistema è BIBO stabile per

$$\{a > 0\} \ \cup \ \{a = -2\}$$

ii) [3 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento è:

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2 + 3s}$$

Utilizzando la decomposizione in fratti semplici, si ha

$$H(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$$

con $A = -1/3$ e $B = 4/3$. Quindi, utilizzando le note espressione

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t}\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s-\lambda}$$

abbiamo

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t) = -\frac{1}{3}\delta_{-1}(t) + \frac{4}{3}e^{-3t}\delta_{-1}(t)$$

iii) [3 punti] Per calcolare l'uscita desiderata utilizziamo la decomposizione dell'uscita in evoluzione libera e risposta forzata

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

dove l'evoluzione libera si scrive come combinazione dei modi 1 e e^{-3t}:

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-3t}.$$

Imponendo che le condizioni iniziali siano soddisfatte si ottiene:

$$y_\ell(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad \frac{dy_\ell}{dt}_{|t=0^-} = -3c_2 = 1$$

da cui: $c_2 = -\frac{1}{3}$ e $c_1 = -c_2 = \frac{1}{3}$. La risposta forzata si può ottenere usando la proprietà di tempo invarianza: definiamo $v(t) = 2\delta_{-1}(t)$ e sia $y_v(t)$ la risposta forzata all'ingresso $v(t)$. Poichè $u(t) = 2\delta_{-1}(t-2) = v(t-2)$, allora la risposta forzata sarà $y_f(t) = y_v(t-2)$.

Calcoliamo ora $y_v(t)$, ad esempio utilizzando le trasformate di Laplace. La trasformata di Laplace di $y_v(t)$ soddisfa l'equazione:

$$Y_v(s) = H(s)V(s) = \frac{s-1}{s^2+3s}\frac{2}{s} = \frac{d_1}{s} + \frac{d_2}{s^2} + \frac{d_3}{s+3}$$

I coefficienti d_1, d_2 e d_3 si possono calcolare, as esempio, facendo il minimo comune denominatore ed eguagliando i numeratori:

$$2(s-1) = d_3 s^2 + d_1 s(s+3) + d_2(s+3)$$

da cui:

$$\begin{cases} d_3 + d_1 &= 0 \\ 3d_1 + d_2 &= 2 \\ 3d_2 &= -2 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione

$$\begin{cases} d_1 &= \frac{8}{9} \\ d_2 &= -\frac{2}{3} \\ d_3 &= -\frac{8}{9} \end{cases}$$

Quindi, antitrasformando:

$$y_v(t) = \frac{8}{9}\delta_{-1}(t) - \frac{2}{3}t\delta_{-1}(t) - \frac{8}{9}e^{-3t}\delta_{-1}(t)$$

e la risposta forzata

$$y_f(t) = y_v(t-2) = \frac{8}{9}\delta_{-1}(t-2) - \frac{2}{3}(t-2)\delta_{-1}(t-2) - \frac{8}{9}e^{-3(t-2)}\delta_{-1}(t-2)$$

L'uscita del sistema in corrispondenza delle condizioni iniziali ed ingresso assegnati è quindi:

$$y(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{8}{9}\delta_{-1}(t-2) - \frac{2}{3}(t-2)\delta_{-1}(t-2) - \frac{8}{9}e^{-3(t-2)}\delta_{-1}(t-2)$$

Esercizio 3.

i) [3 punti] Il segnale generatore in figura si può esprimere nella forma:

$$v_g(t) = \Lambda(t+1) - \Lambda(t-1)$$

Utilizzando le note espressioni per i coefficienti di Fourier abbiamo

$$u_k = \frac{1}{T} V_g\left(\frac{k}{T}\right)_{|T=10}$$

dove

$$V_g(f) = \mathcal{F}[v_g(t)](f) = e^{j2\pi f}\text{sinc}^2(f) - e^{-j2\pi f}\text{sinc}^2(f) = 2j\text{sin}(2\pi f)\text{sinc}^2(f)$$

e quindi:

$$u_k = \frac{2j}{10}\text{sin}\left(\frac{\pi k}{5}\right)\text{sinc}^2\left(\frac{k}{10}\right)$$

ii) [3 punti] Ricordando che la risposta in frequenza di un filtro RC ha la forma

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

(che è la risposta un frequenza di un sistema BIBO stabile per ogni valore di R e C, poichè $R > 0$ e $C > 0$).

Il segnale di uscita ammette serie di Fourier, e i suoi coefficienti sono dati dall'espressione

$$y_k = H(j\omega_k)u_k \quad \omega_k = 2\pi f_k \quad f_k = \frac{k}{10}$$

La frequenza di interesse è 1 Hz, che corrisponde a $k = 10$. Quindi, per soddisfare le specifiche di progetto, dobbiamo garantire che

$$|H(j\omega_k)|_{|k=10} = \frac{1}{2}$$

e quindi

$$|H(j\omega_k)|^2_{|k=10} = \frac{1}{1 + 4\pi^2R^2C^2} = \frac{1}{4}$$

da cui

$$RC = \sqrt{\frac{3}{4\pi^2}}$$

Dato che il filtro è "passa basso", e osservando che il coefficiente di Fourier u_k per $k = \pm 10$ è nullo, sarebbe stato sufficiente imporre la condizione sul modulo di $H(j\omega)$ per $\omega_k = 2\pi k/10$ per $|k| \geq 11$.