COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
2 febbraio 2017

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Teoria 1. Si consideri un sistema LTI a tempo continuo descritto da un'equazione differenziale di ordine n. Si ricavi, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, la decomposizione in risposta libera ed evoluzione forzata e si ricavi l'espressione della funzione di trasferimento in funzione dei coefficienti dell'equazione differenziale.

Teoria 2. Si dia la definizione di serie di Fourier per un segnale $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, periodico a potenza media finita

$$P_v := \frac{1}{T} \int_0^T |v(t)|^2 \, dt < \infty$$

e si discuta il legame tra la potenza media del segnale ed i coefficienti di Fourier. Come si può utilizzare questo legame per approssimare il segnale usando la serie troncata?

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
2 febbraio 2017

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{2s - 200}{s^3 + 0.02s^2 + s}$$

Esercizio 2.[9 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{1}{9}y(k-2) = 2u(k) + u(k-1) + \frac{1}{2}u(k-2) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

i) Si calcoli la risposta impulsiva

ii) Si calcoli l'uscita del sistema in corrispondenza all'ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k)$ e condizioni iniziali $y(-1) = 0$ e $y(-2) = 1$.

iii) Dire se è possibile (e perchè) trovare un $u(k)$ del tipo

$$u(k) = \lambda^k \delta_{-1}(k) \quad |\lambda| > 1$$

tale da garantire una risposta forzata $y_f(k)$ limitatata per tutti i tempi $k \geq 0$.

Esercizio 3. [6 punti] Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{3}{s+1}$$

ed i segnali $u_\ell(t) := a_\ell sin(\omega_\ell t)\delta_{-1}(t)$,con $\ell = 1, 2, 3$ dove $a_1 = 1$, $a_2 = 10$, $a_3 = -3$ e $\omega_\ell = 2\ell$.

1. Si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u_1(t) = a_1 sin(\omega_1 t)\delta_{-1}(t)$ e si discuta il legame tra la risposta a regime permanente e la risposta forzata.

2. Si calcoli la risposta a regime permanente del sistema con funzione di trasferimento $H(s)$ all'ingresso $u(t) := \sum_{\ell=1}^{3} u_\ell(t)$ (non è necessario fare esplicitamente eventuali conti di moduli e fasi di numeri complessi)

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -\frac{200}{j\omega}\frac{(1-\frac{j\omega}{100})}{1+2j0.01\omega-\omega^2}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

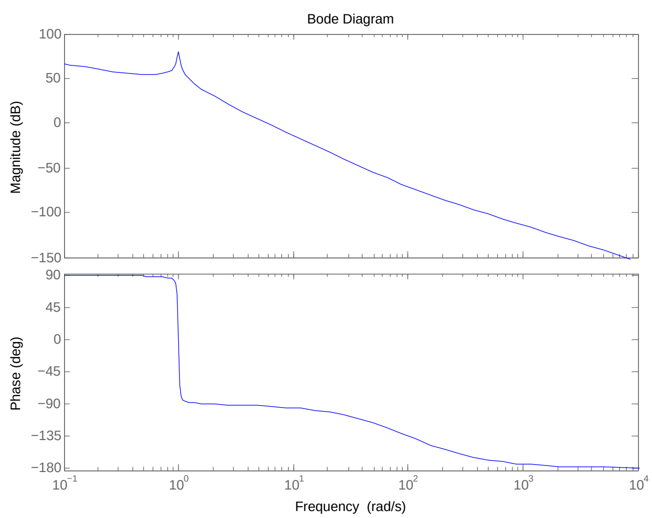

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Si può calcolare la risposta impulsiva operando nel dominio delle trasformate zeta. La funzione di trasferimento si scrive immediatamente e risulta:

$$H(z) = \frac{2z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{9}}$$

Utilizzando la solita tecnica di antitrasformazione, conviene definire

$$H_1(z) := \frac{1}{z} H(z)$$

Gli zeri del denominatore sono rispettivamente 0, $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{3}$, e quindi $H_1(z)$ ammette la decomposizione in fratti semplici

$$H_1(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{3}} + \frac{C}{z + \frac{1}{3}}$$

dove

$$A = \lim_{z \to 0} zH_1(z) = -\frac{9}{2}$$
$$B = \lim_{z \to 1/3} (z - \frac{1}{3})H_1(z) = \frac{19}{4}$$
$$C = \lim_{z \to -1/3} (z + \frac{1}{3})H_1(z) = \frac{7}{4}$$

quindi la risposta impulsiva si ottiene per antitrasformazione utilizzando le trasformate notevoli:

$$\begin{aligned} h(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[zH_1(z)\right](k) \\ &= A\delta(k) + B\left(\tfrac{1}{3}\right)^k \delta_{-1}(k) + C\left(-\tfrac{1}{3}\right)^k \delta_{-1}(k) \\ &= -\tfrac{9}{2}\delta(k) + \tfrac{19}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^k \delta_{-1}(k) + \tfrac{7}{4}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^k \delta_{-1}(k) \\ &= 2\delta(k) + \tfrac{19}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^k \delta_{-1}(k-1) + \tfrac{7}{4}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^k \delta_{-1}(k-1) \end{aligned}$$

ii) [3 punti] La risposta del sistema si ottiene come somma dell'evoluzione libera e della risposta forzata:

$$y(k) = y_\ell(k) + y_f(k)$$

Per calcolare l'evoluzione libera osserviamo che le radici del polinomio caratteristico $z^2 - \frac{1}{9}$ sono $\pm\frac{1}{3}$ e quindi l'evoluzione libera ha la forma

$$y_\ell(k) = c_1 \left(\frac{1}{3}\right)^k + c_2 \left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

ed imponendo le condizioni iniziali si ottiene:

$$\begin{aligned} y_\ell(-1) &= 3c_1 - 3c_2 = 0 \\ y_\ell(-2) &= 9c_1 + 9c_2 = 1 \end{aligned}$$

che ha come unica soluzione $c_1 = c_2 = \frac{1}{18}$. Per quanto riguarda la risposta forzata, basta osservare che

$$y_f(k) = \sum_{\ell=0}^{k} h(k-\ell)u(\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} h(k-\ell)\delta_{-1}(\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} h(k-\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} h(\ell)$$

Utilizzando le proprietà della serie geometrica

$$\sum_{\ell=0}^{k} \lambda^k = \frac{1-\lambda^{k+1}}{1-\lambda}$$

e l'espressione della risposta impulsiva calcolata sopra, si ottiene, per $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} y_f(k) &= -\tfrac{9}{2} + \tfrac{19}{4}\tfrac{1-(1/3)^{k+1}}{1-(1/3)} + \tfrac{7}{4}\tfrac{1-(-1/3)^{k+1}}{1+(1/3)} \\ &= -\tfrac{9}{2} + \tfrac{19}{4}\tfrac{3}{2}\left(1-(1/3)^{k+1}\right) + \tfrac{7}{4}\tfrac{3}{4}\left(1-(-1/3)^{k+1}\right) \end{aligned}$$

iii) [3 punti] La risposta forzata si può calcolare, nel dominio delle trasformate zeta, utilizzando la nota espressione

$$Y_f(z) = H(z)U(z)$$

Se $u(k) = \lambda^k \delta_{-1}(k)$, $U(z) = \frac{z}{z-\lambda}$ e quindi

$$Y_f(z) = H(z)\frac{z}{z-\lambda}$$

Poichè $|\lambda| > 1$, l'antitrasformata zeta di $Y_f(z)$ è limitata se e solo se uno zero di $H(z)$ "cancella" il polo λ di $U(z)$, in modo che i poli di $Y_f(z)$ siano tutti a modulo minore di 1. Questo è possibile se e solo se $H(z)$ ha uno zero a modulo maggiore di 1. Per calcolare gli zeri di

$$H(z) = \frac{2z^2 + z + \frac{1}{2}}{z^2 - \frac{1}{9}}$$

basta calcolare gli zeri del polinomio $2z^2 + z + \frac{1}{2}$ che sono:

$$z_{1,2} = \frac{-1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{4}} = \frac{-1}{4} \pm \sqrt{-\frac{12}{16}} = \frac{-1}{4} \pm j\sqrt{\frac{3}{16}}$$

il cui modulo è

$$|z_{1,2}| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{2} < 1$$

Quindi, poichè gli zeri del polinomio a numeratore sono in modulo minore di uno, non si possono effettuare cancellazioni con il termine $(z-\lambda)$ al denominatore e quindi l'ingresso cercato NON esiste.

Esercizio 3.

i) [4 punti] Utlizzando l'ingresso $u_1(t) = a_1 sin(\omega_1 t)\delta_{-1}(t)$ Possiamo operare nel dominio delle trasformate di Laplace, da cui:

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)](s) = a_1 \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$$

La (trasformata di Laplace della) risposta forzata all'ingresso $U(s)$ è

$$Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{3}{s+1} a_1 \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$$

Calcolando l'espansione in fratti semplici si ottiene:

$$Y_f(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s - j\omega_1} + \frac{\bar{B}}{s + j\omega_1}$$

Dove A, B si calcolano come al solito utilizzando i limiti del tipo

$$A = \lim_{s \to -1}(s+1)Y_f(s) = \frac{3a_1\omega_1}{1+\omega_1^2} = \frac{6}{5}$$

$$B = \lim_{s \to j\omega_1}(s - j\omega)Y_f(s) = \frac{3}{j\omega_1 + 1}\frac{1}{2j} = H(j\omega_1)\frac{1}{2j}$$

Che ha come antitrasformata:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= Ae^{-t}\delta_{-1}(t) + H(j\omega_1)\tfrac{1}{2j}e^{j\omega_1 t}\delta_{-1}(t) - \bar{H}(j\omega_1)\tfrac{1}{2j}e^{-j\omega_1 t}\delta_{-1}(t) \\ &= Ae^{-t}\delta_{-1}(t) + |H(j\omega_1)|\sin(\omega_1 t + \angle H(j\omega_1))\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

La risposta a regime forzata si può decoporre nella forma $y_f(t) = y_{tr}(t) + y_{rp}(t)$ dove

$$y_{tr}(t) = Ae^{-t}\delta_{-1}(t)$$

é la componente di "transitorio" che si annulla per $t \to \infty$ e

$$y_{rp}(t) = |H(j\omega_1)|\sin(\omega_1 t + \angle H(j\omega_1))\delta_{-1}(t)$$

(la componente "di regime") che è proprio con la risposta di regime permanente del sistema con funzione di trasferimento $H(s) = 3/(s+1)$ all'ingresso con $u(t) = a_1 sin(\omega_1 t)\delta_{-1}(t)$.

ii) [2 punti] Dato che il sistema con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{3}{s+1}$$

è BIBO stabile, e utilizzando la linearità, per calcolare la risposta a regime permanente basta applicare la formula

$$y_{rp}(t) = \sum_{\ell=1}^{3} y_{rp,\ell}(t)$$

dove $y_{rp,\ell}$ è la risposta a regime permanente all'ingresso $u_\ell(t) := a_\ell \sin(\omega_\ell t)\delta_{-1}(t)$ che si ottiene dalla formula

$$y_{rp,\ell}(t) = |H(s)|_{|s=j\omega_\ell} \sin(\omega_\ell t + \angle|H(s)|_{|s=j\omega_\ell})$$

(i conti di moduli e fasi sono banali e qundi omessi)