COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
19 giugno 2017

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Teoria 1. Si enunci e dimostri il Teorema del Campionamento ideale

Teoria 2. Si ricavi, operando nel dominio delle trasformate di Laplace, la decomposizione in evoluzione libera e risposta forzata dell'uscita $y(t)$ di un sistema LTI descritto da un'equazione differenziale del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

in funzione delle condizioni iniziali ed assumendo che l'ingresso sia causale, $u(t) = 0$, $\forall t < 0$.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
19 giugno 2017

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1001s + 1000}{(s^2 + 2s + 100)(s + 100)}$$

Esercizio 2.[9 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - y(k-1) + \frac{1}{4}y(k-2) = b_1u(k) + b_2u(k-1) \quad k \in \mathbb{Z} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

i) Si calcoli la risposta impulsiva. Cosa succede se $b_2 = -\frac{b_1}{2}$? Era prevedibile?

ii) Assumendo $a = 1/3$, si dica se esiste, per opportuni valori di λ, un ingresso del tipo $u(k) = \lambda^k \delta_{-1}(k)$ in corrispondenza del quale la risposta forzata abbia la forma

$$y_f(k) = \left[c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2 k \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \delta_{-1}(k).$$

iii) Si consideri il sistema "inverso" che ha $y(k)$ come ingresso e $u(k)$ come uscita, i.e.

$$b_1u(k) + b_2u(k-1) = y(k) - y(k-2) + \frac{1}{4}y(k-2) \quad k \in \mathbb{Z} \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

Si discutano la causalità e la stabilità al variare di $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. [6 punti] Si consideri il segnale

$$v(t) = \text{rep}_T \left[\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)\right] \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Si calcolino i coefficienti di Fourier del segnale $v(t)$.

2. Si dica se esiste, ed in caso affermativo si calcoli, la risposta di regime permanente (eventualmente utilizzando la serie di Fourier) del sistema con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{1 + as} \quad a \in \mathbb{R}$$

all'ingresso $u(t) = v(t)\delta_{-1}(t)$

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = \frac{1}{10} \frac{\left(1 + \frac{j\omega}{1000}\right)(1 + j\omega)}{\left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)\left(1 + 2j0.1\frac{\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

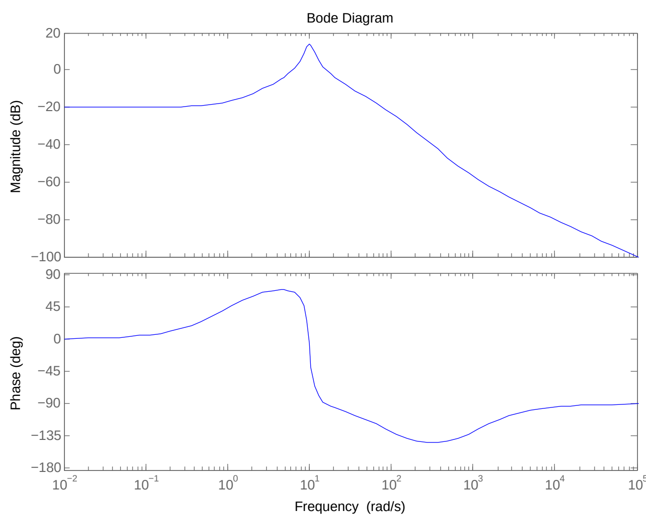

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Si può calcolare la risposta impulsiva operando nel dominio delle trasformate zeta. La funzione di trasferimento si scrive immediatamente e risulta:

$$H(z) = \frac{(b_1 z + b_2)z}{(z - \frac{1}{2})^2}$$

dove abbiamo usato il fatto che $z^2 - z + \frac{1}{4} = (z - \frac{1}{2})^2$. Utilizzando la solita tecnica di antitrasformazione, conviene definire

$$H_1(z) := \frac{1}{z} H(z) = \frac{(b_1 z + b_2)}{(z - \frac{1}{2})^2} = \frac{A}{(z - \frac{1}{2})} + \frac{B}{(z - \frac{1}{2})^2}$$

dove si ottiene:

$$B = \lim_{z \to \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2})^2 H_1(z) = \frac{b_1}{2} + b_2$$

$$A = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left[(z - \frac{1}{2})^2 H_1(z) \right] = b_1$$

da cui

$$H(z) = b_1 \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \left(\frac{b_1}{2} + b_2 \right) \frac{z}{(z - \frac{1}{2})^2}$$

La risposta impulsiva si trova calcolando l'antitrasformata zeta:

$$\begin{aligned} h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[H(z)\right](k) &= b_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k) + \left(b_2 + \tfrac{b_1}{2}\right) k \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1} \delta_{-1}(k) \\ &= b_1 \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k) + (2b_2 + b_1)\, k \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k) \end{aligned}$$

Chiaramente se $b_2 = -\frac{b_1}{2}$ il secondo modo viene pesato con coefficiente nullo. Questo è evidente dalla funzione di trasferimento perchè sotto la condizione $b_2 = -\frac{b_1}{2}$ si verifica una cancellazione e $H(z)$ risulta:

$$H(z)_{|b_2 = -\frac{b_1}{2}} = b_1 \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

ii) [3 punti] Dato un ingresso della forma $u(k) = \lambda^k \delta_{-1}(k)$, la trasformata Zeta della risposta forzata è:

$$Y_f(z) = H(z)U(z) = \frac{(b_1 z + b_2)z}{(z - \frac{1}{2})^2} \frac{z}{(z - \lambda)}$$

Chiaramente se $\lambda = -\frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$ si ottiene:

$$Y_f(z) = \frac{b_1 z^2}{(z - \frac{1}{2})^2}$$

Calcolando l'antitrasformata Zeta si vede immediatamente che $y_f(k)$ ha proprio la struttura richiesta (per un'opportuna scelta di c_1 e c_2).

iii) [3 punti] Per quanto riguarda la causalità, si vede immediatamente dall'equazione alle differenze che il sistema è causale se e solo se $b_1 \neq 0$. Assumiamo quindi $b_1 \neq 0$.

Per quanto riguarda la stabilità asintotica, il polinomio caratteristico del sistema inverso è

$$p_I(z) = b_1 z + b_2$$

che ha come unico zero $\lambda_I = -\frac{b_2}{b_1}$ e quindi il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| < 1$. Per quanto riguarda la stabilità BIBO, basta calcolare la funzione di trasferimento, che risulta essere:

$$H_I(z) = H^{-1}(z) = \frac{(z-\frac{1}{2})^2}{(b_1 z + b_2)z}$$

I poli sono (a meno di cancellazioni), $\{0, -\frac{b_2}{b_1}\}$. Poichè le cancellazioni si possono verificare con gli zeri del polinomio a numeratore, che sono entrambi $\frac{1}{2}$, il sistema è BIBO stabile, se e solo se è asintoticamente stabile, cioè se $\left|\frac{b_2}{b_1}\right| < 1$.

Esercizio 3.

i) [3 punti] Si ricordi per prima cosa che il segnale $v(t)$, periodico di periodo T, ottenuto per ripetizione periodica del segnale generatore $v_g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$, ha come coefficienti di Fourier

$$v_k = \frac{1}{T} V_g\left(\frac{k}{T}\right)$$

dove $V_g(f)$ è la trasformata di Fourier del genratore $v_g(t)$. Ricordando ora che $\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, la trasformata di Fourier della finestra triangolare

$$\mathcal{F}\left[\Lambda(t)\right](f) = \mathcal{F}\left[\Pi(t)\right]^2(f) = \mathrm{sinc}^2(f)$$

ed usando la proprietà del cambio di scala si ottiene:

$$V_g(f) = 2\mathrm{sinc}^2(2f)$$

Quindi i coefficienti di Fourier (della serie esponenziale di $v(t)$) sono

$$v_k = \frac{1}{T} V_g\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{2}{T}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2k}{T}\right)$$

ii) [3 punti] Per $a \neq 0$, riscrivendo $H(s)$ nella forma

$$H(s) = \frac{1}{a}\frac{1}{s+\frac{1}{a}}$$

si osserva che l'unico polo è $p = -\frac{1}{a}$. Il sistema ammette una risposta di regime permanente se è BIBO stabile, e quindi se $p = -\frac{1}{a} < 0$, cioè se $a > 0$. In aggiunta, se $a = 0$ la funzione di trasferimento si riduce a $H(s) = 1$ che chiaramente è la funzione di trasferimento di un sistema BIBO stabile.

In questo caso il segnale di uscita $y_{rp}(t)$ a regime, coincide con la risposta che si avrebbe se l'ingresso fosse stato $u(t) = v(t)$, e quindi ammette la seguente decomposizione in serie di Fourier:

$$y_{rp}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$$

dove

$$y_k = v_k H(j2\pi\frac{k}{T}) = v_k \frac{1}{1 + ja2\pi\frac{k}{T}} = 2\mathrm{sinc}^2\left(\frac{2k}{T}\right)\frac{1}{T + ja2\pi k}$$