COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
9 settembre 2016

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Teoria 1. Sia $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$ un segnale limitato, continuo e derivabile, e periodico di periodo T e sia $H(s)$ la funzione di trasferimento di un sistema Σ LTI BIBO stabile. Si ricavi (se esiste) l'espressione della risposta di regime permanente del sistema Σ all'ingresso $u(t) := v(t)\delta_{-1}(t)$.

Teoria 2. Si consideri un sistema LTI a tempo discreto descritto da un'equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{n} b_i u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Si discuta il legame tra i modi del sistema (e le loro proprietà), le radici del polinomio caratteristico e i poli della funzione di trasferimento.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
9 settembre 2016

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{(s^2 + s + 100)}{(s^3 + .01s^2 + s)(s^2 + 150s + 10000)}$$

Esercizio 2.[9 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - \frac{1}{2}u(k-3) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

i) Si calcoli la risposta impulsiva (operando nel dominio del tempo);

ii) Si trovi, se possibile, un segnale di ingresso $u(k)$ casuale, non identicamente nullo che soddisfi la condizione $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0 \ \forall k > K$

iii) Dire se è possibile trovare un $u(k)$ causale, limitato e non identicamente nullo che soddisfi i seguenti requisiti:

1. $\nexists M$ s.t. $u(k) = 0 \ \forall k > M$
2. $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0 \ \forall k > K$

Esercizio 3. [6 punti] Si consideri la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{3}{s+1}$$

1. Si scriva una equazione differenziale di ordine minimo ed una di ordine non minimo che ammettano entrambe $H(s)$ come funzione di trasferimento.

2. Si consideri l'equazione differenziale di ordine derivata al punto 1 e siano $u(t)$ e $y(t)$ l'ingresso e l'uscita rispettivamente. Siano $u_c(k) := u(kT_c)$ e $y_c(k) := y(kT_c)$ i segnali di ingresso e uscita campionati con passo di campionamento $T_c = 1$ e si assuma che $u(t)$ sia costante tra un passo di campionamento ed il successivo; si scriva un'equazione alle differenze che abbia $u_c(k)$ come ingresso e $y_c(k)$ come uscita.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = \frac{1}{100}\frac{1}{j\omega}\frac{1+j2\frac{1}{20}\frac{\omega}{10}-\frac{\omega^2}{100}}{(1+j2\frac{3}{4}\frac{\omega}{100}-\frac{\omega^2}{10000})(1+j2\frac{1}{200}\omega-\omega^2)}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

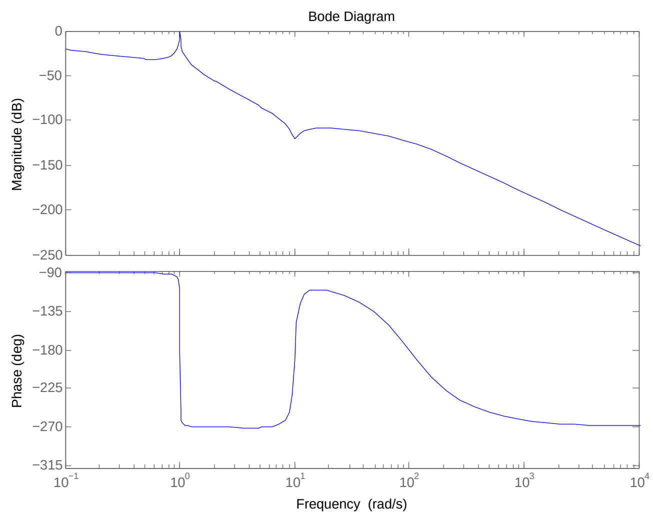

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Ponendo $u(k)=\delta(k)$ si ottiene che la risposta impulsiva $h(k)$ soddisfa:

$$h(k)-\frac{1}{4}h(k-2)=\delta(k-1)-\frac{1}{2}\delta(k-3)k\in\mathbb{Z} \tag{2}$$

con $h(k) = 0 \; \forall k < 0$. L'equazione caratteristica $z^2 - \frac{1}{4} = 0$ ha come soluzioni $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Con riferimento alla generica equazione alle differenze

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i)$$

si ha $m = 3$ ed $n = 2$ e quindi la forma generica della risposta impulsiva è:

$$h(k) = d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + \left[d_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-2)} + d_4 \left(-\frac{1}{2}\right)^{(k-2)} \right] \delta_{-1}(k-2)$$

Dobbiamo ora determinare i coefficienti d_0, d_1, d_2, d_3; per fare questo calcoliamo i primi 4 valori di $h(k)$; da (2) si ottiene: $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, $h(2) = 0$, $h(3) = -1/2+1/4 = -\frac{1}{4}$ da cui: $d_0 = 0$, $d_1 = 1$ e:

$$\begin{aligned} 0 &= d_3 + d_4 \\ -\frac{1}{4} &= d_3\frac{1}{2} - d_4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

che si risolve immediatamente ottendo $d_3 = -1/4$ e $d_4 = 1/4$.

ii) [3 punti] Operando nel dominio delle trasformate si ottiene

$$Y_f(z) = H(z)U(z)$$

con $H(z) = \frac{z^2-1/2}{z(z^2-1/4)}$; si osservi che $y_f(k)$ ha durata finita (i.e. $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0 \; \forall k > K$) se e solo se $Y_f(z)$ è un polinomio in z^{-1}. È immediato vedere che, scegliendo[1] $U(z) = \frac{z^2-1/4}{z^2}$ si ottiene $Y_f(z) = \frac{z^2-1/2}{z^3} = z^{-1} - 1/2z^{-3}$ e quindi $y_f(k) = \delta(k-1) - 1/2\delta(k-3)$ come desiderato.

iii) [3 punti] Si noti che, affinchè $u(k)$ abbia durata infinita (i.e. $\nexists M$ s.t. $u(k) = 0 \; \forall k > M$) la sua trasformata zeta deve avere almeno un polo non nell'origine.

Ancora operando nel dominio delle trasformate si ottiene

$$Y_f(z) = H(z)U(z)$$

con $H(z) = \frac{z^2-1/2}{z(z^2-1/4)}$; si osservi che $y_f(k)$ ha durata finita (i.e. $\exists K$ s.t. $y_f(k) = 0 \; \forall k > K$) se e solo se $Y_f(z)$ è un polinomio in z^{-1}, i.e. $Y_f(z) = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i z^{-i}$ e quindi $U(z)$ deve avere la forma:

$$U(z) = \frac{Y_f(z)}{H(z)} = \sum_{i=0}^{K} \alpha_i z^{-i} \frac{z(z^2-1/4)}{z^2-1/2}$$

Di conseguenza, a parte i possibili poli nell'origine, $U(z)$ può solo avere[2] poli in $\pm 1/2$. Poichè questi poli sono in modulo minore di 1, la sequenza $u(k)$ nel dominio del tempo è convergente e quindi soddisfa la condizione $\exists U < \infty$ s.t. $|u(k)| < U \; \forall k \in \mathbb{Z}$. Di conseguenze l'ingresso cercato esiste.

Esercizio 3.

[1] A cui corrisponde $u(k) = \delta(k) - 1/4\delta(k-2)$ che soddisfa le specifiche del problema.

[2] Se $\sum_{i=0}^{K} \alpha_i z^{-i}$ non li cancella.

[3 punti] Una equazione differenziale di ordine minimo che realizza $H(s)$ è:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3u(t)$$

mentre una di ordine non minimo è, ad esempio,

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = 3\frac{du(t)}{dt}$$

[3 punti]
Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3u(t)$$

con condizione iniziale $y(t_0) = y_0$ ed ingresso costante $u(t) = u_0$ nell'intervallo $[t_0, t)$.

L'uscita ha la forma:

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = e^{-(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

con $h(t) = 3e^{-t}\delta_{-1}(t)$ la risposta impulsiva del sistema.

Di conseguenza abbiamo:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_\ell(t) + y_f(t) = e^{-(t-t_0)}y_0 + 3\left[\int_{t_0}^{t} e^{-t+\tau}d\tau\right]u_0 \\ &= e^{-(t-t_0)}y_0 + 3e^{-t}(e^t - e^{t_0})u_0 \\ &= e^{-(t-t_0)}y_0 + 3(1 - e^{t_0-t})u_0 \end{aligned}$$

Ponendo ora $t_0 = kT_c$ e $t = (k+1)T_c$ e $u_0 = u(kT_c)$, $k \in \mathbb{Z}$ si ottiene:

$$y((k+1)T_c) = e^{-T_c}y(kT_c) + 3(1 - e^{-T_c})u(kT_c)$$

Di conseguenza l'equazione alle differenze cercata è:

$$y_c(k+1) = ay_c(k) + bu_c(k) \quad a = e^{-T_c} \quad b = 3(1 - e^{-T_c}) \quad k \in \mathbb{Z}$$