COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
25 febbraio 2016

Teoria 1. [5 punti] Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e, con riferimento alla BIBO stabilità, se ne fornisca una caratterizzazione in termini di risposta impulsiva.

Teoria 2. [5 punti] Si dia le definizione di Trasformata di Fourier per un segnale a tempo continuo e si discuta il suo ruolo nell'analisi in frequenza dei sistemi dinamici lineari tempo invarianti

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
25 febbraio 2016

Esercizio 1. [12 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (1+a^3)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a^3\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + bu(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con a e b parametri reali.

i) Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in R$ e $b \in \mathbb{R}$.

ii) Per $a = 0$, si determini la risposta impulsiva del sistema.

iii) Per $a = 0$ si determini (se possibile) un ingresso $u(t)$, non identicamente nullo e che non contenga impulsi, in modo che l'uscita forzata sia formata da soli modi di tipo polinomiale (i.e. t^k per opportuni k)

iv) Per $a = 0$ e $b = -1$ si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

Esercizio 2. [8 punti] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$u(t) = \left[5 + 5\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\,(t - 10k)\right]\delta_{-1}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

i) Si dica se il segnale è periodico e, in caso di risposta affermativa, se ne calcoli il periodo T.

ii) Si consideri un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

Si calcoli, se esiste, la risposta a regime permanente del sistema (2) all'ingresso (1).

iii) Si dica se esiste un opportuno passo di campionamento T_c (e in caso di risposta affermativa si calcoli T_c) in modo che sia possibile ricostruire il segnale (1) a partire dai suoi campioni $u_k := u(kT_c)$, $k \in \mathbb{Z}$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [3 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$p(s) = s^3 + (a^3+1)s^2 + a^3 s = s(s+1)(s+a^3) = 0$$

che ha sempre (per ogni valore di a) una radice $\lambda_1 = 0$. Di conseguenza il sistema non è mai asintoticamente stabile.

Per studiare la BIBO stabilità, consideriamo la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s+b}{s(s+1)(s+a^3)}$$

Il sistema è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a parte reale strettamente negativa. Questo succede se e solo se $b = 0$ (in modo da cancellare lo zero nell'origine del denominatore) e se le altre radici del denominatore $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -a^3$ sono a parte reale strettamente negativa, che succede se e solo se $a > 0$. In conclusione il sistema è BIBO stabile se e solo se $b = 0$ e $a > 0$.

ii) [2 punti] Per calcolare la risposta impulsiva (con $a = 0$) basta considerare l'espansione in fratti semplici della funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s+b}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}$$

Con conti elementari si ottiene:

$$C = \lim_{s\to -1}(s+1)H(s) = b-1$$

$$B = \lim_{s\to 0} s^2 H(s) = b$$

$$A = \lim_{s\to 0} \frac{d\left[s^2 H(s)\right]}{ds} = 1-b$$

da cui

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t) = A\delta_{-1}(t) + Bt\delta_{-1}(t) + Ce^{-t}\delta_{-1}(t) \\ &= (1-b)\delta_{-1}(t) + bt\delta_{-1}(t) + (b-1)e^{-t}\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

iii) [2 punti] Dato un ingresso $u(t)$ con trasformata di Laplace $U(s)$, la trasformata di Laplace della risposta forzata ha la forma:

$$Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{s+b}{s^2(s+1)}U(s)$$

Affinchè la risposta forzata sia solo una combinazione lineare di modi di tipo polinomiale (t^k), tutti i poli di $Y_f(s)$ devono essere nell'origine. In aggiunta, affinchè $u(t)$ non contenga impulsi, è necessario che $U(s)$ sia strettamente propria. Ad esempio, scelgiendo

$$U(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \qquad u(t) = (1+t)\delta_{-1}(t)$$

si ottiene
$$Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{s+b}{s^3} = \frac{1}{s^2} + \frac{b}{s^3}$$
da cui
$$y_f(t) = t\delta_{-1}(t) + \frac{b}{2}t^2\delta_{-1}(t)$$
iv) [2 punti] Per $a = 0$ e $b = -1$ la funzione di trasferimento diventa
$$H(s) = \frac{s-1}{s^2(s+1)}$$
e quindi la risposta in frequenza
$$H(j\omega) = -\left(\frac{1}{j\omega}\right)^2 \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$$
I diagrammi di Bode sono riportati nella figura 1.

Esercizio 2.
i) [2 punti] Il segnale $u(t)$ è nullo per tempi negativi e ha un andamento di tipo "onda quadra" per tempi positivi. Di conseguenza, comunque si scelga $T \in \mathbb{R}$, non è possibile che valga:
$$u(t) = u(t+T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
Concludiamo che il segnale NON è periodico.
ii) [3 punti] Il segnale $u(t)$ si può scrivere nella forma
$$u(t) = u_p(t)\delta_{-1}(t) \quad u_p(t) := 5 + 5\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(t - 10k\right)$$
dove $u_p(t)$ è periodico di periodo $T = 10$ (si vede immediatamente che $u_p(t) = u_p(t-10)$, $\forall t \in \mathbb{R}$). Un possibile segnale generatore è:
$$u_{pg}(t) = 5\Pi\left(\frac{t}{10}\right) + 5\Pi\left(t\right)$$
Si noti infatti che
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 5\Pi\left(\frac{t-kT}{10}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 5\Pi\left(\frac{t-10k}{10}\right) = 5$$
I coefficienti della serie esponenziale di Fourier di $u_p(t)$ si possono ottenere usando la regola
$$u_k = \frac{1}{T}U_{pg}\left(\frac{k}{T}\right)$$
dove
$$U_{pg}(f) = 50\mathrm{sinc}(10f) + 5\mathrm{sinc}(f)$$
e quindi (dove $\delta(k)$ è il delta di Kronecker, i.e. il delta "discreto"):
$$u_k = \frac{1}{10}U_g\left(\frac{k}{10}\right) = 5\mathrm{sinc}\left(k\right) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{10}\right) = 5\delta(k) + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{k}{10}\right)$$

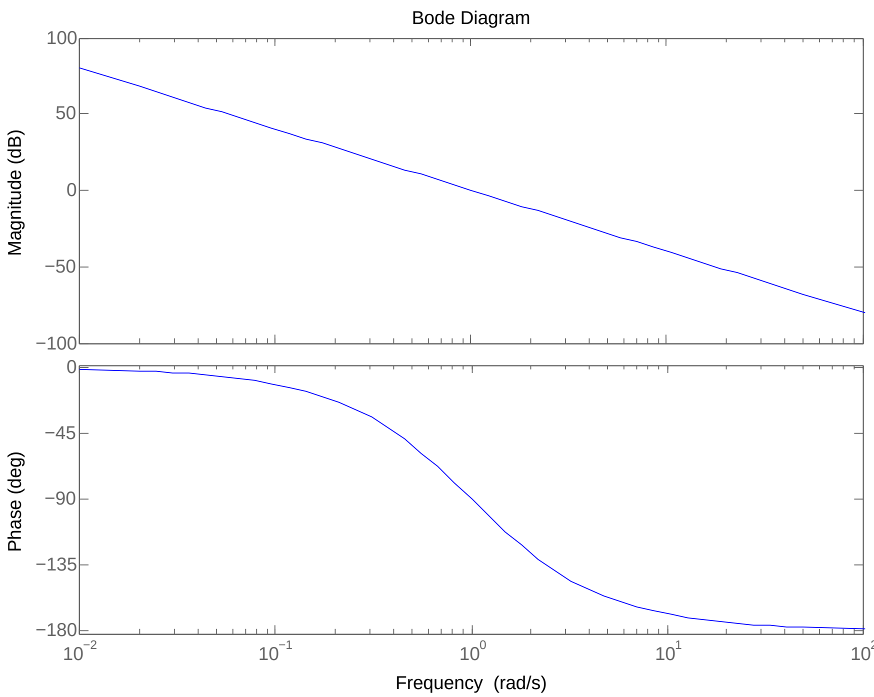

Figure 1: Diagramma di Bode.

Poichè il sistema assegnato è asintoticamente stabile, quando viene alimentato con il segnale $u(t) = u_p(t)\delta_{-1}(t)$, l'uscita a regime permanente esiste e coincide con la risposta al segnale periodico $u_p(t)$, che si può quindi calcolare nella forma

$$y_{rp}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_k e^{j\frac{2\pi}{T}k}$$

dove

$$y_k := H\left(j2\pi\frac{k}{T}\right)u_k = \frac{1}{1+j2\pi\frac{k}{T}}u_k$$

iii) [3 punti] Per il teorema del campionamento il segnale $u(t)$ può essere ricostruito dai suoi campioni se e solo se la sua trasformata di Fourier ha supporto limitato. Poichè vale:

$$Up(f) = \frac{1}{T}\text{rep}_{\frac{1}{T}}\left[U_{pg}(t)\right] = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} U_{pg}\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

e Poichè $U_{gp}(f)$ non ha supporto limitato, non lo ha nemmeno $U_p(f)$ e quindi nemmeno $U(f)$. Di conseguenza il segnale $u(t)$ NON si può ricostruire esattamente dai suoi campioni per ogni scelta di T_c.