COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
20 giugno 2016

Teoria 1. [5 punti] Con riferimento ad un sistema LTI descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti, si dia la definizione di funzione di trasferimento, se ne ricavi il legame con i coefficienti dell'equazione differenziale e si dica quali proprietà del sistema lineare si possono dedurre da essa.

Teoria 2. [5 punti] Si enunci e si dimostri il Teorema del Campionamento ideale e se ne discuta l'utilizzo pratico.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
20 giugno 2016

Esercizio 1. [12 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (\beta^2 - 1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (\beta + 99)\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + |\alpha|u(t), \qquad t \in \mathbb{R}_+,$$

con α e β parametri reali.

i) Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $\alpha \in R$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

ii) Per $\beta = 1$, si determini la risposta impulsiva del sistema.

iii) Per $\beta = 1$, si determini, se possibile, un ingresso $u(t)$ casuale e limitato in modo che l'uscita forzata sia

$$y_f(t) = (1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)$$

iv) Per $\alpha = 1$ e $\beta = \sqrt{1.01}$ si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

Esercizio 2. [8 punti] Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(k) = \sum_{i=2}^{p} b_i u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z} \quad p \in \mathbb{Z}^+, \;\; p > 2 \tag{1}$$

i) Si calcoli la risposta impulsiva del sistema e si dica se (ed eventualmente sotto quali condizioni) il sistema è asintoticamente stabile e/o BIBO stabile. Quanti ritardi presenta il sistema (cioè, dopo quanti passi temporali l'uscita è influenzata dall'ingresso)?

ii) Si consideri un ingresso del tipo $u(k) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{k} + \frac{\pi}{4}\right)\delta_{-1}(\mathrm{k})$. Si calcoli (in funzione dei coefficienti) b_i, $i = 2, ..., p$, la risposta a regime permanente. Si specializzi il risultato al caso $p = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$.

iii) Assumendo che $p = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = -1$, si calcoli, se possibile, un ingresso $u(k)$ in modo che l'uscita forzata soddisfi

$$y_f(k) = 0, \quad \forall k \neq 4$$

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$p(s) = s^3 + (\beta^2 - 1)s^2 + (\beta + 99)s = 0$$

che ha sempre (per ogni valore di β) una radice $\lambda_1 = 0$. Di conseguenza il sistema non è mai asintoticamente stabile.

Per studiare la BIBO stabilità, consideriamo la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s + |\alpha|}{s(s^2 + (\beta^2 - 1)s + (\beta + 99))}$$

Il sistema è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $H(s)$ sono a parte reale strettamente negativa. Questo succede se e solo se $|\alpha| = 0$ (in modo da cancellare lo zero nell'origine del denominatore) e se le altre radici del denominatore sono a parte reale strettamente negativa, che succede se e solo se (regola di Cartesio) $\beta > -99$ e $|\beta| > 1$. In conclusione il sistema è BIBO stabile se e solo se $|\alpha| = 0$ e $\beta \in (-99, -1) \cup (1, +\infty)$.

ii) [2 punti] Per calcolare la risposta impulsiva (con $\beta = 1$) basta considerare l'espansione in fratti semplici della funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s + |\alpha|}{s(s^2 + 100)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - j10} + \frac{\bar{B}}{s + j10}$$

Con conti elementari si ottiene:

$$A = \lim_{s \to 0} sH(s) = \frac{|\alpha|}{100}$$

$$B = \lim_{s \to j10} (s - j10)H(s) = \frac{j10 + |\alpha|}{(j10)(j20)} = -\frac{|\alpha| + j10}{200}$$

da cui

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t) = A\delta_{-1}(t) + Be^{j10t}\delta_{-1}(t) + \bar{B}e^{-j10t}\delta_{-1}(t) \\ &= \tfrac{|\alpha|}{100}\delta_{-1}(t) - \tfrac{|\alpha|+j10}{200}e^{j10t}\delta_{-1}(t) - \tfrac{|\alpha|-j10}{200}e^{-j10t}\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

iii) [2 punti] Per trovare l'ingresso cercato si possono utilizzare le trasformate di Laplace. La trasformata di Laplace della risposta forzata risulta:

$$Y_f(s) = \mathcal{L}[(1 - e^{-t})\delta_{-1}(t)](s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1} = \frac{1}{s(s + 1)}$$

Quindi, la trasformata dell'ingresso cercato deve essere:

$$U(s) = H^{-1}(s)Y_f(s) = \frac{s(^2{+}100)}{s(s + 1)(s + |\alpha|} = \frac{(^2{+}100)}{(s + 1)(s + |\alpha|}$$

Poichè $U(s)$ ha grado relativo zero (propria ma non strettamente propria) l'antistraformata $u(t) := \mathcal{L}^{-1}[U(s)](t)$ contiene un impulso di Dirac centrato nell'origine, e quindi $u(t)$ non è limitato. Quindi il segnale cercato non esiste.

iv) [2 punti] Per $\alpha = 1$ e $\beta\sqrt{1.01}$ la funzione di trasferimento diventa

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s^2+0.01s+99+\sqrt{1.01})} \simeq \frac{s+1}{s(s^2+0.01s+100)}$$

e quindi la risposta in frequenza

$$H(j\omega) = \frac{1}{100}\frac{(1+j\omega)}{j\omega(1+2j\frac{1}{2000}\frac{\omega}{10}-\frac{\omega^2}{100})}$$

I diagrammi di Bode sono riportati nella figura 1.

Esercizio 2.

i) [3 punti] La risposta impulsiva del sistema si ottiene semplicemente imponendo $u(k) = \delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ in (1), i.e.

$$h(k) = \sum_{i=2}^{p} b_i \delta(k-i) \quad p < \infty$$

Poichè l'evoluzione libera del sistema è identicamente nulla, il sistema è asintoticamente stabile. In aggiunta, il sistema è BIBO stabile perch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| = \sum_{k=2}^{p} |b_k| < \infty$$

per ogni scelta di b_i, purchè p sia finito.

Poichè $h(0) = h(1) = 0$, il sistema ha almeno due ritardi (cioè l'uscita è influenzata dall'ingresso dopo due passi). Se $b_2 \neq 0$ il sistema ha esattamente due ritardi.

ii) [3 punti]

Poichè il sistema è BIBO stabile, la risposta a regime permanente ad un ingresso sinusoidale esite e si può calcolare dalla formula

$$y_{rp}(k) = |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| \sin\left(\frac{\pi}{2}k + \frac{\pi}{4} + \angle H(e^{j\frac{\pi}{2}})\right) \delta_{-1}(k)$$

dove $H(e^{j\theta})$ è la risposta in frequenza del sistema

$$H(e^{j\theta}) = \sum_{k=2}^{p} b_k e^{-jk\theta}$$

Con $p = 2$ e $b_2 = -b_3 = 1$ abbiamo:

$$H(e^{j\theta}) = e^{-j2\theta} - e^{-j3\theta}$$

e quindi

$$H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = e^{-j\pi} - e^{-j\frac{3}{2}\pi} = -1 - j$$

da cui

$$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \sqrt{2} \qquad \angle H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = -\frac{3}{4}\pi$$

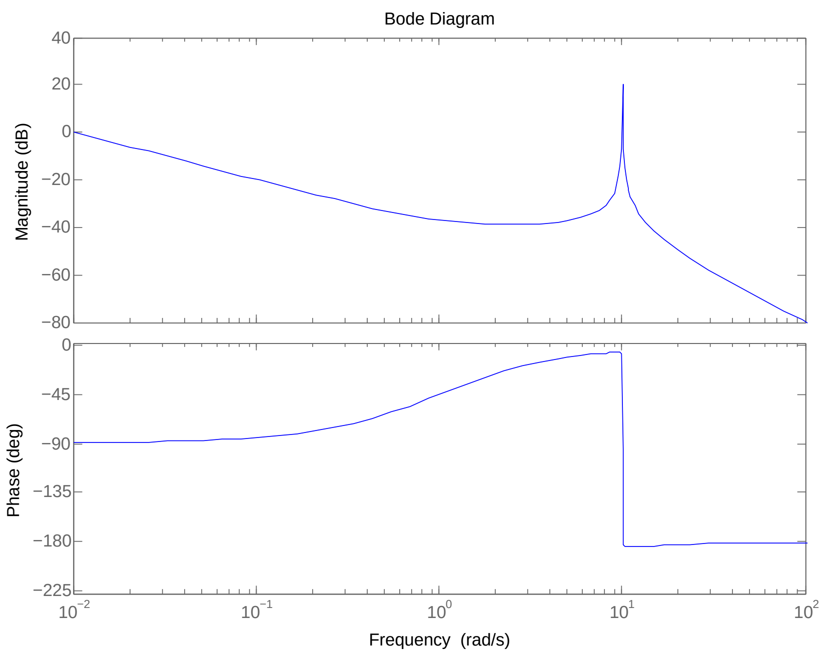

Figure 1: Diagramma di Bode.

La riposta a regime permanente risulta quindi:

$$y_{rp}(k) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{2}\right)\delta_{-1}(k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

iii) [2 punti]

Per avere $y_f(k) = 0$, $\forall k \neq 4$ deve essere $y_f(k) = c\delta(k-4)$ da cui, operando nel dominio delle trasformate zeta,

$$Y_f(z) = cz^{-4}$$

e quindi

$$U(z) = H^{-1}(z)Y_f(z) = \frac{z^3}{z-1}cz^{-4} = \frac{c}{z(z-1)} = cz^{-2}\frac{z}{(z-1)}$$

la cui antitrasformata zeta è

$$u(k) = \mathcal{Z}^{-1}[U(z)](k) = c\delta_{-1}(k-2) \quad k \in \mathbb{Z}$$

che è l'ingresso cercato.