COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
13 luglio 2016

NOTA: Tutte le risposte vanno adeguatamente giustificate. Risposte errate e/o con motivazioni errate avranno valore negativo nella valutazione

Teoria 1. [5 punti] Con riferimento ad un sistema LTI a tempo discreto descritto da un'equazione alle differenze del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Utilizzando le trasformate zeta, si ricavi la forma generale della risposta impulsiva $h(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Teoria 2. [5 punti] Si diano le definizioni di Serie di Fourier e di Trasformata di Fourier e si ricavi il legame tra la serie di Fourier (di un segnale periodico $v(t)$) e la trasformata di Fourier di un segnale "generatore" $v_g(t)$ del segnale $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
13 luglio 2016

Esercizio 1. [12 punti] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-8k}{4}\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi\left(\frac{t-8k-3}{4}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

i) Si dica se il segnale è periodico e, in caso di risposta affermativa, se ne calcoli il periodo T.

ii) Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $u(t)$.

(iii) Si consideri il sistema con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s}{(s^2+0.01s+\omega_0^2)(s+0.01)} \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

e sia $y_{rp}(t)$ l'uscita (in regime permanente) corrispondente all'ingresso $u(t)$ in (1). Con riferimento alle serie esponenziale di Fourier di $u(t)$ ed $y(t)$

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t}, \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t} \tag{3}$$

si determini (anche in modo approssimato) il valore ω_0^* della pulsazione ω_0 in (2) in modo che la componente di $u(t)$ corrispondente alla frequenza fondamentale (i.e. il termine per $k = \pm 1$ in (3)) abbia massima amplificazione.

iv) Fissando ora $\omega_0 = \omega_0^*$, si tracci il diagramma di Bode di (2). Che significato ha la pulsazione $\frac{2\pi}{T}$ sul diagramma di Bode della risposta in frequenza del sistema (2)?

Esercizio 2. [8 punti] Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(k) + \left(b^2 - \frac{1}{2}\right) y(k-1) - \frac{b^2}{2} y(k-2) = u(k-1) + au(k-3), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a e b sono due parametri reali.

i) Si discuta la stabilità asintotica e BIBO al variare di a e b.

ii) Fissando $a = b$ si calcoli, nel dominio del tempo, la risposta impulsiva del sistema.

iii) Si dica se è possibile trovare $u(k)$ *causale* in modo che, a partire da condizioni iniziali nulle, si abbia $y(0) \neq 0$?

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] Si verifica immediatamente che il segnale è periodico di periodo $T = 8$. Infatti $T = 8$ è il pi piccolo valore che soddisfa

$$u(t) = u(t+T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

ii) [3 punti] Per calcolare la trasformata di Fourier di $u(t)$ si può prima calcolare la sua Serie di Fourier.

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{j2\pi \frac{k}{8} t}$$

e poi osservare che

$$\mathcal{F}[u](f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \delta(f - \frac{k}{8})$$

I coefficienti di Fourier si possono ottenere utilizzando la relazione

$$u_k = \frac{1}{T} U_g \left(\frac{k}{T} \right)$$

dove $U_g(f)$ è la trasformata di Fourier di un segnale generatore di $u(t)$. È immediato verificare che si può ad esempio definire

$$u_g(t) = \Pi\left(\frac{t}{4}\right) + \Pi\left(\frac{t-3}{4}\right),$$

da cui

$$U_g(f) = 4\mathrm{sinc}(4\mathrm{f}) + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathrm{f}3} 4\mathrm{sinc}(4\mathrm{f}) = 4(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi\mathrm{f}3})\mathrm{sinc}(4\mathrm{f})$$

da cui

$$u_k = \frac{1}{8} U_g \left(\frac{k}{8}\right) = \frac{1}{2}(1 + e^{-j\pi\frac{k}{4}3})\mathrm{sinc}\left(\frac{\mathrm{k}}{2}\right)$$

iii) [3 punti] Il sistema descritto dalla funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + 0.01s + \omega_0^2)(s + 0.01)} \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}^+$$

è BIBO stabile (tutti i poli sono a parte reale negativa per ogni scelta di ω_0) e quindi la risposta a regime permanente ad un segnale periodico è periodica e i coefficienti di Fourier si possono calcolare utilizzando la relazione

$$y_k = H(s)_{|s=j\omega_k} u_k \qquad \omega_k = 2\pi\frac{k}{T} = \pi\frac{k}{4}$$

per ottenere la massima palificazione della prima armonica si deve massimizzare

$$|H(s)|_{s=j\omega 1} = |H(s)|_{s=j\pi\frac{1}{4}} \quad \omega_1 = \frac{\pi}{4} \simeq 0.7854$$

in funzione di ω_0 in (2). Si noti che la funzione di trasferimento ha uno zero nell'origine e un polo in -0.01. Quindi il diagramma asintotico sarà "piatto" per pulsazioni maggiori di 0.01 e minori di ω_0 (ammesso che $\omega_0 > 0.01$). Poi vi è un polo doppio con pulsazione ω_0. Se lo smorzamento è sufficientemente piccolo ci sarà un massimo di risonanza in prossimità di ω_0. Scegliendo $\omega_0 \simeq \frac{pi}{4}$, si vede che lo smorzamento $\xi = \frac{0.01}{2}\frac{1}{\omega} = \frac{0.01\pi}{2} << 1$ e quindi il punto di massimo è effettivamente molto vicino a ω_0. Consideriamo quindi l'approssimazione $\omega_r \simeq \omega_0 = \frac{\pi}{4}$

iv) [5 punti] Per $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$ si ha

$$H(s) = \frac{s}{(s^2 + 0.01s + \frac{\pi^2}{16})(s + 0.01)} \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}^+$$

I diagrammi di Bode sono riportati nella figura 1.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Il polinomio caratteristico del sistema è

$$p(z) = z^2 + (b^2 - \frac{1}{2})z - \frac{b^2}{2} = (z + b^2)(z - \frac{1}{2})$$

che ha zeri in $-b^2$ e $\frac{1}{2}$. Quindi il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $b^2 < 1$ e quindi $|b| < 1$.

Per quanto riguarda la BIBO stabilità, si può calcolare la funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^2 + a}{z(z + b^2)(z - \frac{1}{2})}$$

Il sistema è ovviamente BIBO stabile quando è anche asintoticamente stabile e quindi se $|b| < 1$. Nel caso $|b| \geq 1$ dobbiamo verificare se vi possono essere cancellazioni. Il numeratore ha zeri reali se e solo se $a < 0$, nel qual caso

$$H(z) = \frac{(z - \sqrt{-a})(z + \sqrt{-a})}{z(z + b^2)(z - \frac{1}{2})}$$

quindi quando $\sqrt{-a} = b^2$ si ha una cancellazione e la funzione di trasferimento diventa:

$$H(z) = \frac{(z - \sqrt{-a})}{z(z - \frac{1}{2})}$$

che è BIBO stabile. Quindi, in conclusione il sistema è BIBO stabile se $|b| < 1$ oppure se $\{a < 0\} \cap \{b^2 = \sqrt{-a}\}$ i) [3 punti] Per calcolare la risposta impulsiva nel domino del tempo, osserviamo che $m = 3$ ed $n = 2$, quindi la risposta impulsiva ha la struttura (si osservi che $-b^2 \neq \frac{1}{2} \forall b \in \mathbb{R}$)

$$h(k) = d_0\delta(k) + d_1\delta(k-1) + \left[d_2\left(\frac{1}{2}\right)^{(k-2)} + d_3(-b^2)^{(k-2)}\right]\delta_{-1}(k-2) \qquad (4)$$

I coefficienti d_0, d_1, d_2 e d_3 si possono determinare calcolando i valori di $h(k)$ assume per $k = 1, 2, 3$. In particolare, dall'equazione alle differenze (sostituendo $u(k) = \delta(k)$ si ottiene imediatamente:

$$h(0) = 0 \quad h(1) = 1 \quad h(2) = -\left(b^2 - \frac{1}{2}\right) \qquad (5)$$

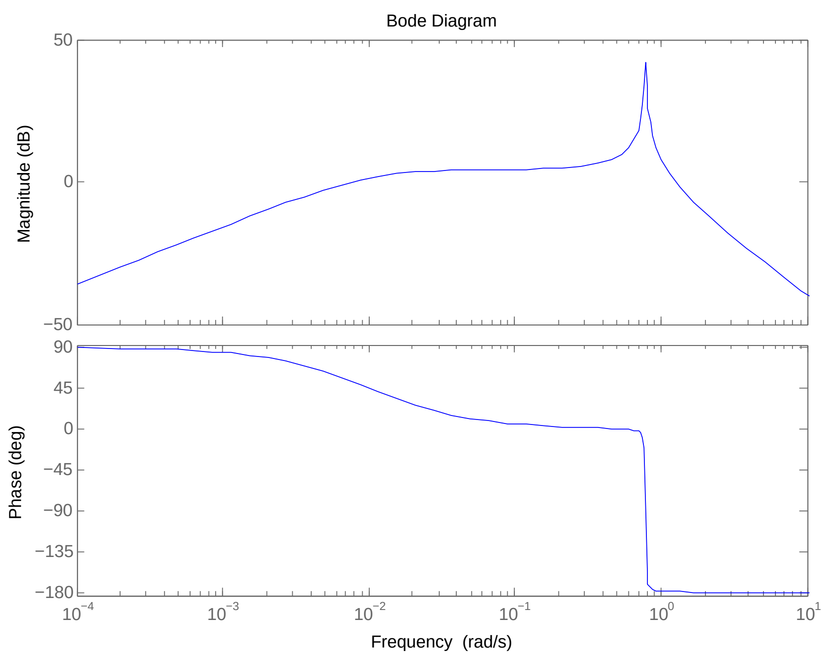

Figure 1: Diagramma di Bode.

e

$$h(3) = \left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{b^2}{2} + b$$

(dove abbiamo usato $a = b$). Imponendo ora che $h(k)$ in (4) soddisfi le condizioni in

(5) si ottiene:

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 = d_0 \\ h(1) &= 1 = d_1 \\ h(2) &= -\left(b^2 - \tfrac{1}{2}\right) = d_2 + d_3 \\ h(3) &= \left(b^2 - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{b^2}{2} + b = \tfrac{d_2}{2} - d_3 b^2 \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$d_3 = -\frac{2\left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 + 2b + \left(b^2 - \frac{1}{2}\right)}{2b^2 + 1}$$

e

$$d_2 = -d_3 - \left(b^2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\left(b^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 + 2b + \left(b^2 - \frac{1}{2}\right)}{2b^2 + 1} - \left(b^2 - \frac{1}{2}\right)$$

iii) [2 punti] Poichè $h(0) = 0$, il sistema ha un ritardo e quindi la risposta forzata ad un segnale causale è (al più) non nulla solo per $k > 0$. Quindi non è possibile trovare il segnale cercato