COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
16 giugno 2015

Teoria 1. [5 punti] Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti e, con riferimento alla BIBO stabilità, se ne fornisca una caratterizzazione in termini di risposta impulsiva.

Teoria 2. [5 punti] Si diano le definizioni di Serie e Trasformata di Fourier per un segnale a tempo continuo e si discuta il loro legame.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
16 giugno 2015

Esercizio 1. [10 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$(a^2-1)\frac{d^2y(t)}{dt^2}+a^3\frac{dy(t)}{dt}+(a-1)y(t)=\frac{du(t)}{dt}+3u(t), \qquad t\in\mathbb{R}_+,$$

con a parametro reale.

i) Si discuta la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare di $a \in R$.

ii) Per $a = 0$, si determini la risposta impulsiva del sistema.

iii) Si determini (se possibile) un ingresso $u(t)$, non identicamente nullo ed indipendente da a, in modo che l'uscita forzata sia, per ogni scelta di a, una combinazione lineare dei modi del sistema. *(Se la risposta è adeguatamente giustificata NON è necessario calcolare esplicitamente l'uscita forzata).*

iv) Per $a = 0$ si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della risposta in frequenza del sistema.

Esercizio 2. [6 punti] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$u(t)=5+5\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Pi\left(t-10k\right), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

i) Si dica se il segnale è periodico e, in caso di risposta affermativa, se ne calcoli il periodo T e la serie di Fourier.

ii) Si consideri un sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=bu(t), \qquad t\in\mathbb{R}, \tag{2}$$

con a, b parametri reali e sia $y(t)$ l'uscita corrispondente all'ingresso $u(t)$ in (1). Si determinino, se possibile, valori di a e b in modo che le componenti del segnale $u(t)$ a frequenza maggiore (in modulo) di $f_* = \frac{3}{5}Hz$ vengano attenuate dal filtro (2) di almeno un fattore 2 in ampiezza ed il segnale $y(t)$ abbia valore medio uguale a 5.

Esercizio 3. [4 punti] Si consideri il sistema a tempo discreto

$$v(k)-\left(\frac{1}{4}+2a\right)v(k-1)+\frac{a}{2}v(k-2)=u(k)-u(k-1), \qquad k\in\mathbb{Z}_+,$$

dove a è un parametro reale.

i) Si determini, al variare di a in $\mathbb{R}$, la risposta impulsiva del sistema $h_a(k)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1. i) [2 punti] L'equazione caratteristica del sistema è

$$p(s) = (a^2 - 1)s^2 + a^3 s + (a - 1) = 0$$

Per studiare il segno della parte reale delle radici si può usare la regola di Cartesio.

Le radici sono a parte reale negativa se e solo se tutte i coefficienti $(a^2 - 1, a^3, a - 1)$ sono dello stesso segno, e quindi se $a > 1$ oppure $a \in (-1, 0)$. Si noti che bisogna studiare a parte i casi $a = \pm 1$ e $a = 0$. Per $a = 1$ il polinomio caratteristico $p(s) = s$ ha grado 1, ed ha una radice in $s = 0$. Per $a = -1$ il polinomio caratteristico $p(s) = -s - 2$ ha grado 1, ed ha una radice in $s = -2$. Per $a = 0$ il polinomio caratteristico $p(s) = -s^2 - 1$ ha grado 2 con radici in $s = \pm j$.

Quindi il sistema è asintoticamente stabile se e solo se $a \in [-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Si consideri ora la BIBO stabilità. Si osservi che il polinomio a numeratore in

$$H(s) = \frac{s + 3}{(a^2 - 1)s^2 + a^3 s + (a - 1)}$$

ha, indipendentemente da a, una radice in $s = -3$

Di conseguenza non si possono avere cancellazioni di zeri "instabili" del polinomio caratteristico. Quindi i poli della funzione di trasferimento sono tutti e soli gli zeri del polinomio caratteristico; ne consegue che il sistema è BIBO stabile se e solo se è anche asintoticamente stabile.

ii) [2 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento diventa

$$H(s) = -\frac{s + 3}{s^2 + 1}$$

i cui poli sono $\pm j$. Considerando l'espansione in fratti semplici si ha:

$$H(s) = \frac{A}{s - j} + \frac{\bar{A}}{s + j}$$

dove

$$A = \lim_{s \to j}(s - j)H(s) = -\frac{j + 1}{2j} = \frac{1}{2}(3j - 1)$$

e quindi la risposta impulsiva, ottenuta per antitrasformazione, risulta:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}[H(s)](t) = [Ae^{jt} + \bar{A}e^{-jt}]\delta_{-1}(t) \\ &= [2Re(A)\text{cos(t)} - 2Im(\text{A})\text{sin(t)}]\delta_{-1}(\text{t}) = [-\text{cos(t)} - 3\text{sin(t)}]\delta_{-1}(\text{t}) \end{aligned}$$

iii) [2 punti] Dato un ingresso $u(t)$ con trasformata di Laplace $U(s)$, la trasformata di Laplace della risposta forzata ha la forma:

$$Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{s + 3}{(a^2 - 1)s^2 + a^3 s + (a - 1)} U(s)$$

Affinchè $y_f(t)$ sia una combinazione dei modi del sistema, è necessario e sufficiente che i poli di $Y_f(s)$ siano un sottoinsieme degli zeri di $p(s) = (a^2 - 1)s^2 + a^3 s + (a -$

1). Questa affermazione si giustifica immediatamente ricorrendo all'antitrasformazione utilizzando la tecnica dell'espansione in fratti semplici. Si noti anche che Y_f deve essere strettamente propria, altrimenti la risposta forzata conterrebbe anche un impulso.

Di conseguenza basta scegliere $U(s) = \frac{1}{s+3}$ (cioè $u(t) = e^{-3t}\delta_{-1}(t)$ per ottenere

$$Y_f(s) = \frac{1}{(a^2-1)s^2 + a^3 s + (a-1)}$$

Si noti che l'ingresso assegnato NON dipende dal valore di a.

Osservazione: La scelta $u(t) = \delta(t)$ porterebbe a $Y_f(s) = H(s)$ che soddisfa i requisiti per ogni $a \neq \pm 1$. Infatti, per $a \pm 1$ $Y_f(s)$ sarebbe propria (ma non strettamente propria) e quindi $y_f(t)$ avrebbe un impulso nell'origine.

iv) [2 punti] Per $a = 0$ la funzione di trasferimento diventa

$$H(s) = -\frac{s+3}{s^2+1}$$

e quindi la risposta in frequenza

$$H(j\omega) = 3\frac{1 + j\omega\frac{1}{3}}{1-\omega^2}$$

I diagrammi di Bode sono riportati nella figura 1.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Il segnale è periodico di periodo $T = 10$ (si vede immediatamente che $u(t) = u(t-10)$, $\forall t \in \mathbb{R}$). Un possibile segnale generatore è:

$$u_g(t) = 5\Pi\left(\frac{t}{10}\right) + 5\Pi\left(t\right)$$

Si noti infatti che

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 5\Pi\left(\frac{t-kT}{10}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 5\Pi\left(\frac{t-10k}{10}\right) = 5$$

I coefficienti della serie esponenziale di Fourier si possono ottenere usando la regola

$$u_k = \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right)$$

dove

$$U_g(f) = 50\text{sinc}(10f) + 5\text{sinc}(f)$$

e quindi (dove $\delta(k)$ è il delta di Kronecker, i.e. il delta "discreto"):

$$u_k = \frac{1}{10} U_g\left(\frac{k}{10}\right) = 5\text{sinc}\left(k\right) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{k}{10}\right) = 5\delta(k) + \frac{1}{2}\text{sinc}\left(\frac{k}{10}\right)$$

ii) [3 punti] I vincoli posti dall'esercizio si riferiscono alla frequenza $f_* = \frac{3}{5}Hz$ (attenuazione di un fattore 2 in ampiezza) ed alla frequenza nulla (componente continua del segnale di uscita uguale a 5).

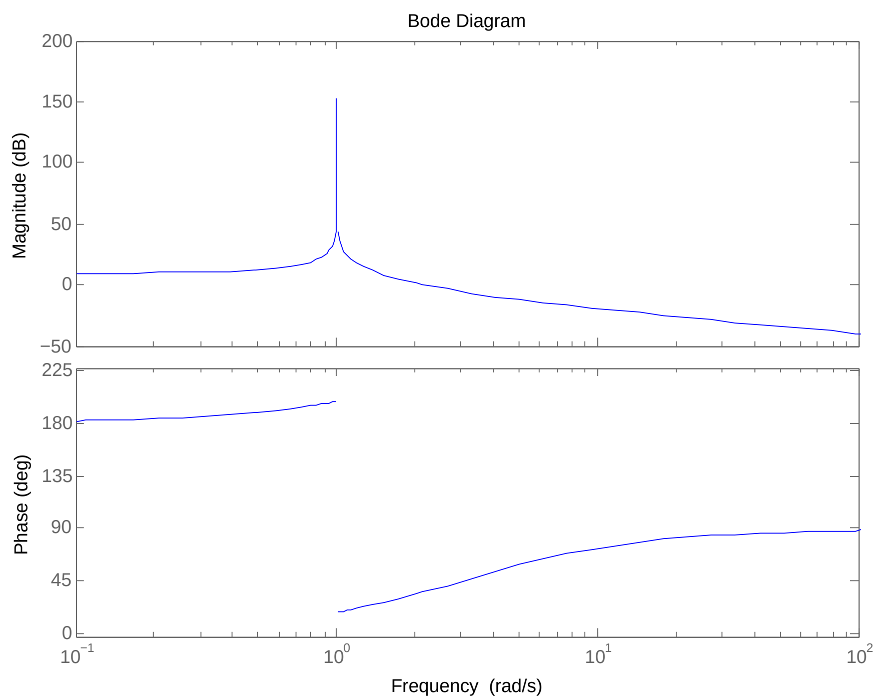

Figure 1: **Figura 1.** Diagramma di Bode.

La componente continua del segnale di uscita è $y_0 = H(j0)u_0 = \frac{b}{a}5.5 = 5$, da cui il vincolo $b = a/(1.1)$. La risposta in frequenza risulta quindi

$$H(j2\pi f) = \frac{a}{1.1(j2\pi f + a)}$$

il cui modulo è una funzione monotona decrescente di f. La prima componente del segnale a frequenza maggiore o uguale (in modulo) di $\frac{3}{5}Hz$ corrisponde al termine per $|k| = 6$ (frequenza $\frac{k}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ Hz) della serie esponenziale di Fourier. I coefficienti di Fourier della segnale di uscita sono dati da $y_k = H\left(j2\pi\frac{k}{10}\right)u_k$. Quindi bisogna garantire che

$$\left|H\left(j2\pi\frac{6}{10}\right)\right| = \frac{a}{1.1\sqrt{4\pi^2\frac{9}{25} + a^2}} < \frac{1}{2}$$

e quindi:

$$\left(\frac{2}{1.1}\right)^2 a^2 < 4\pi^2\frac{9}{25} + a^2$$

da cui:

$$a < \frac{6\pi}{5\sqrt{\left(\frac{2}{1.1}\right)^2 - 1}}$$

Per garantire la stabilità del sistema a deve essere positivo e quindi

$$0 < a < \frac{6\pi}{5\sqrt{\left(\frac{2}{1.1}\right)^2 - 1}}$$

Esercizio 3. [4 punti] Per calcolare la risposta impulsiva si devono determinare i modi del sistema, e quindi le radici dell'equazione caratteristica

$$p(z) = z^2 - \left(\frac{1}{4} + 2a\right)a + \frac{a}{2} = \left(z - \frac{1}{4}\right)(z - 2a)$$

Le radici sono quindi $\lambda_1 = \frac{1}{4}$ e $\lambda_2 = 2a$, che sono distinte purchè $a \neq \frac{1}{8}$. Qundi consideriamo i due casi: $a \neq \frac{1}{8}$ e $a = \frac{1}{8}$. Operando nel dominio delle trasformate zeta abbiamo:

$$H_a(z) = \frac{z(z-1)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)(z - 2a)} \quad H_{a1}(z) := \frac{1}{z}H_a(z) = \frac{(z-1)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)(z - 2a)}$$

Per $a \neq \frac{1}{8}$ l'espansione in fratti semplici risulta

$$H_{a1}(z) = \frac{A}{z - \frac{1}{4}} + \frac{B}{z - 2a}$$

con $A = \frac{3}{8a-1}$ e $B = \frac{8a-4}{8a-1}$ da cui:

$$H_a(z) = \frac{3}{8a-1}\frac{z}{z - \frac{1}{4}} + \frac{8a-4}{8a-1}\frac{z}{z - 2a}$$

e, antitrasformando,

$$h_a(k) = \left[\frac{3}{8a-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k + \frac{8a-4}{8a-1} (2a)^k \right] \delta_{-1}(k)$$

Si osservi chè quest'ultima espressione vale anche per $a = 0$, nel qual caso il polinomio caratteristico ha grado 1, purchè si utlizzi la convenzione (per $a = 0$) $(2a)^k_{|a=0} = \delta(k) = \mathcal{Z}^{-1}[1](k)$, da cui si ottiene

$$h_0(k) = 4\delta(k) - 3 \left(\frac{1}{4}\right)^k \delta_{-1}(k)$$

Invece, per $a = \frac{1}{8}$ le radici del polinomio caratteristico sono coincidenti, e quindi:

$$H_{\frac{1}{8}}(z) = \frac{z(z-1)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2} \quad H_{\frac{1}{8},1}(z) := \frac{1}{z} H_{\frac{1}{8}}(z) = \frac{(z-1)}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$$

e l'espansione in fratti semplici risulta

$$H_{\frac{1}{8},1}(z) = \frac{C}{z - \frac{1}{4}} + \frac{D}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$$

con (facendo denominatore comune) $C = 1$ e $D = -\frac{3}{4}$ da cui:

$$H_{\frac{1}{8}}(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{4}} - \frac{3}{4} \frac{z}{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2}$$

e, antitrasformando,

$$h_{\frac{1}{8}}(k) = \left[\left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{3}{4} k \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \right] \delta_{-1}(k)$$