# COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
# 9 luglio 2015

**Teoria 1. [5 punti]** Con riferimento ad sistema LTI descritto da un'equazione alle differenze del tipo

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k-i) \quad k \in \mathbb{Z}$$

si ricavi la forma generale della risposta impulsiva e si discutano le proprietà di stabilità del sistema.

**Teoria 2.[5 punti]** Si dia la definizione di trasformata di Laplace unilatera e, di seguito, di funzione di trasferimento di un sistema lineare e tempo invariante (LTI). Si discuta il legame tra i poli della funzione di trasferimento ed il carattere dei modi del sistema LTI.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

# COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
# 9 luglio 2015

**Esercizio 1. [5 punti]** Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 - 999s - 1000}{s^3 + 2s^2 + 10000s}$$

**Esercizio 2. [12 punti]** Si consideri un sistema LTI a tempo continuo con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{s+b}{(s-1)(s^2 + 2a^3 s + (2a-1))} \quad a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1. Si scriva un'equazione differenziale di ordine 3 che ammetta (1) come funzione di trasferimento
2. Con riferimento all'equazione differenziale scritta sopra, si discutano la stabilità asintotica e la stabilità BIBO al variare dei parametri $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.
3. Ponendo, nel seguito dell'esercizio, $a = 1$ e $b = 1$,
   - si trovino, se possibile, condizioni iniziali affinchè l'evoluzione libera $y_\ell(t)$, sia convergente (per $t \to \infty$).
   - si ricavi, se possibile, un opportuno ingresso causale $u(t)$ (che NON contenga impulsi) ed opportune condizioni iniziali affinchè l'uscita del sistema per $t \geq 0$ sia una combinazione lineare (a coefficienti non nulli) dei segnali $e^{-t}$ e $te^{-t}$ (non è richiesto di calcolare esplicitamente la risposta $y(t)$, purchè la risposta sia adeguatamente giustificata).

**Esercizio 3. [3 punti]** Sia

$$u(t) = \sin(2\pi t) + 4\sin(20\pi t) \quad t \in \mathbb{R}$$

e sia $y(t)$ il segnale che si ottiene filtrando il segnale $u(t)$ con il filtro con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Si calcolino i coefficienti della serie di Fourier esponenziale dei segnali $u(t)$ e $y(t)$.

# SOLUZIONI

**Esercizio 1.**

i) **[5 punti]** La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -\frac{1}{10} \frac{(1 + j\omega)\left(1 - \frac{j\omega}{1000}\right)}{j\omega(1 + j2\frac{1}{100}\frac{\omega}{100} - \frac{\omega^2}{10000})}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

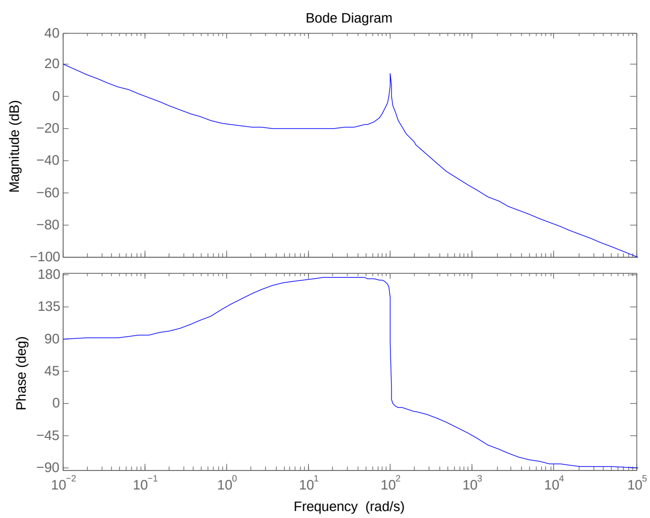


**Figura 1.** Diagramma di Bode.

**Esercizio 2.**

1) **[3 punti]** Svolgendo il prodotto dei due fattori a denominatore di $H(s)$ si ottiene:

$$H(s) = \frac{s + b}{s^3 + (2a^3 - 1)s^2 + (2a - 1 - 2a^3)s - (2a - 1)}$$

e, quindi, un'equazione differenziale di ordine 3 che ammette (1) come funzione di trasferimento è:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + (2a^3-1)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (2a-1-2a^3)\frac{dy(t)}{dt} - (2a-1)y(t) = \frac{du(t)}{dt} + bu(t)$$

2) **[3 punti]** Per studiare la stabilità asintotica consideriamo il polinomio caratteristico di questa equazione differenziale è

$$p(s) = s^3 + (2a^3-1)s^2 + (2a-1-2a^3)s - (2a-1) = (s-1)(s^2+2a^3s+(2a-1))$$

che ammette come radici: $\lambda_1 = 1$ (radice di $s-1$) e $\lambda_2$, $\lambda_3$, radici di $(s^2+2a^3s+(2a-1))$. Quindi, indipendentemente dal valore di $a$ e $b$ il sistema NON è mai asintoticamente stabile.

Per quando riguarda la stabilità BIBO, possiamo studiare il segno della parte reale dei poli di $H(s)$. Affinchè i poli di $H(s)$ siano a parte reale strettamente negativa, lo zero $\lambda_1 = 1$ di $p(s)$ deve essere cancellato (e quindi si deve avere $b = -1$). In aggiunta bisogna assicurarsi che $Re(\lambda_2) < 0$ e $Re(\lambda_3) < 0$.

Utilizzando la regola di Cartesio, $Re(\lambda_2) < 0$ e $Re(\lambda_3) < 0$ se e solo se i coefficienti del polinomio $(s^2 + 2a^3s + (2a-1))$ sono tutti dello stesso segno, e quindi se e solo se $2a^3 > 0$ e $(2a-1) > 0$, da cui $a > \frac{1}{2}$.

Quindi, in conclusione, il sistema è BIBO stabile se e solo se $b = 1$ e $a > \frac{1}{2}$.

3) **[6 punti]** per $a = 1$ e $b = 1$ il polinomio caratteristico è

$$p(s) = (s-1)(s^2+2a^3s+(2a-1)) = (s-1)(s^2+2s+1) = (s-1)(s+1)^2$$

le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. La funzione di trasferimento (1) diventa:

$$\begin{array}{rcl} H(s) & = & \frac{s+b}{(s-1)(s^2+2a^3s+(2a-1))} = \frac{s+1}{(s-1)(s^2+2s+1)} \\ & = & \frac{s+1}{(s-1)(s+1)^2} \\ & = & \frac{1}{(s-1)(s+1)} \end{array}$$

• L'evoluzione libera ha la forma $y_\ell(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3te^{-t}$. Affinchè l'evoluzione libera sia convergente per $t \to \infty$ si deve avere $c_1 = 0$ e quindi

$$y(0) = c_2 \quad \frac{dy(t)}{dt}_{|t=0} = -c_2 + c3 \quad \frac{d^2y(t)}{dt^2}_{|t=0} = c_2 - 2c_3 \tag{2}$$

Quindi, per qualunque scelta di $c_2 \in \mathbb{R}$ e $c_3 \in \mathbb{R}$, le condizioni iniziali in (2) soddisfano le specifiche del problema.

• L'uscita $y(t)$ si può decomporre nella somma di evoluzione libera e risposta forzata:

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t)$$

Per calcolare la risposta forzata si può operare nel dominio delle trasformate di Laplace

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_f(s)](t) \quad Y_f(s) = H(s)U(s)$$

Scegliendo, ad esempio, $U(s) = \frac{1}{s+1}$ si ottiene

$$Y_f(s) = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \tag{3}$$

la cui antitrasformata risulta

$$y_f(t) = Ae^t \delta_{-1}(t) + Be^{-t}\delta_{-1}(t) + Cte^{-t}\delta_{-1}(t)$$

Affinchè $y(t)$ sia una combinazione lineare di $e^{-t}$ e $te^{-t}$, l'evoluzione libera (che è una combinazione dei modi $e^t$, $e^{-t}$ e $te^{-t}$, deve avere la forma

$$y_\ell(t) = -Ae^t + \beta e^{-t}\delta_{-1}(t) + \gamma te^{-t}\delta_{-1}(t)$$

in modo da "cancellare" il termine $Ae^t\delta_{-1}(t)$. I coefficienti $\beta$ e $\gamma$ possono essere arbitrari. Quindi possiamo tranquillamente scegliere (per semplicità) $\beta = \gamma = 0$. Dobbiamo calcolare il valore di $A$ dall'espansione in fratti semplici (3) che risulta:

$$A = \lim_{s\to 1}(s-1)Y_f(s) = \frac{1}{4}$$

Quindi le condizioni iniziale cercate sono:

$$y_\ell(0) = -A = -\frac{1}{4} \quad \frac{dy_\ell(t)}{dt}_{|t=0} = -A = -\frac{1}{4} \quad \frac{d^2y_\ell(t)}{dt^2}_{|t=0} = -A = -\frac{1}{4} \tag{4}$$

OSSERVAZIONE: L'uscita desiderata si poteva anche ottenere usando le condizioni iniziali del punto precedente e ingresso $u(t) = 0$.

**Esercizio 3.**

i) **[3 punti]** Il segnale $u(t)$ è la somma di due segnali seno $\sin(2\pi t) = \sin(2\pi f_1 t)$ e $\sin(20\pi t) = \sin(2\pi f_2 t)$ con $f_1 = 1$ e $f_2 = 10$. Quindi i loro periodi sono, rispettivamente, $T_1 = \frac{1}{f_1} = 1$ e $T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{10}$. Quindi il segnale somma ha periodo $T = mcm(T_1, T_2) = 1$. Utilizzando le note espressioni del segnale $\sin(t)$ in funzione degli esponenziali complessi si ha

$$\begin{aligned} u(t) &= \tfrac{1}{2j}\left(e^{j2\pi t} - e^{-j2\pi t}\right) + \tfrac{4}{2j}\left(e^{j2\pi 10t} - e^{-j2\pi 10t}\right) \\ &= -\tfrac{4}{2j}e^{-j2\pi 10t} - \tfrac{1}{2j}e^{-j2\pi t} + \tfrac{1}{2j}e^{j2\pi t} + \tfrac{4}{2j}e^{j2\pi 10t} \end{aligned} \tag{5}$$

che rappresenta l'espansione in serie di Fourier

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{j2\pi\frac{k}{T}t}$$

di $u(t)$ con $T = 1$ e

$$\begin{cases} u_{10} = \bar{u}_{-10} = \frac{4}{2j} \\ u_1 = \bar{u}_{-1} = \frac{1}{2j} \\ u_k = 0 & k \neq \pm 1 \;\; k \neq \pm 10 \end{cases}$$

Poichè il sistema è BIBO stabile, il segnale di uscita $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, è periodico di periodo $T = 1$ ed i suoi coefficienti di Fourier si ottengono dalla relazione

$$y_k = H(j2\pi k)\, u_k = \frac{1}{j2\pi k + 1} u_k$$