COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
13 giugno 2014

Teoria 1. [5 punti] Si enunci e dimostri il Teorema del Campionamento

Teoria 2.[5 punti] Si dia la definizione di risposta in frequenza per un sistema LTI a tempo continuo descritto da un'equazione differenziale di ordine n. Se ne ricavi l'espressione in termini di risposta impulsiva ed il legame con i coefficienti dell'equazione differenziale. Si discutano infine il suo significato e le sue proprietà.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
13 giugno 2014

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 - 1}{s^3 + 2s^2 + 100s}$$

Esercizio 2.[9 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} \qquad t \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

i) Si discutano la stabilità asintotica e BIBO al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

i) Si calcolino la risposta impulsiva e la risposta in frequenza.

ii) Si determinino, se possibile, condizioni iniziali in modo che l'uscita del sistema con le condizioni iniziali assegnate ed ingresso $u(t) = \delta_{-1}(t)$ sia identicamente nulla $\forall t \geq 0$.

Esercizio 3.[6 punti] Si consideri il sistema a tempo discreto

$$y(k) - \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - bu(k-3) \quad k \in \mathbb{Z}$$

i) Operando nel dominio del tempo, si calcoli la risposta impulsiva

ii) Ponendo $b = 1$ si calcoli la risposta forzata all'ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -\frac{1}{100}\frac{1}{j\omega}\frac{(1-j\omega)(1+j\omega)}{1+2j\frac{1}{10}\frac{\omega}{10}-\frac{\omega^2}{100}}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

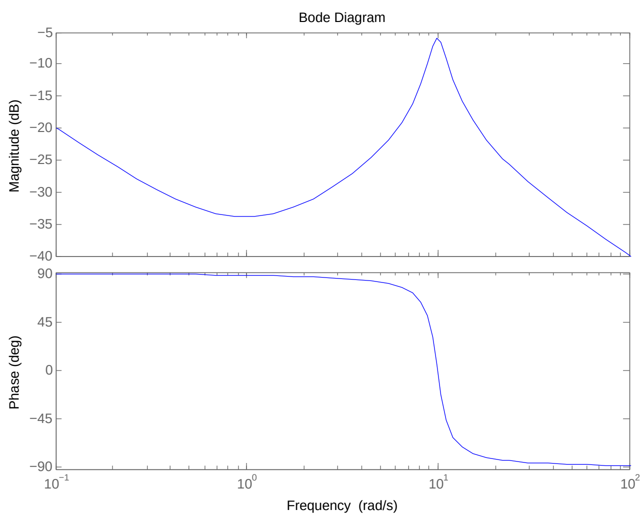

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Il polinomio caratteristico è $p(s) = s^2 + as = s(s + a)$ che ha le due radici $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -a$. Poichè una radice è nulla il sistema non è mai asintoticamente stabile. Per studiare la BIBO stabilità conviene calcolare la funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

L'unico polo è $p = -a$. Quindi il sistema è BIBO stabile se e solo se $\mathcal{R}(a) = a > 0$.

ii) [3 punti] Per calcolare la risposta impulsiva conviene ricordare che

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)\right](t) \quad H(s) = \frac{1}{s+a}$$

da cui la risposta impulsiva è $h(t) = e^{-at}\delta_{-1}(t)$

La risposta in frequenza si ottiene dai coefficienti dell'equazione differenziale:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i (j\omega)^i} = \frac{j\omega}{j\omega^2 + j\omega a} = \frac{1}{j\omega + a}$$

iii) L'uscita del sistema si decompone nella somma di evoluzione libera e risposta forzata

$$y(t) = y_f(t) + y_\ell(t)$$

dove

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_f(s)\right](t) \quad Y_f(s) = H(s)U(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

Introducendo la decomposizione in fratti semplici di $Y_f(s)$ (si assume ora che $a \neq 0$; il caso $a = 0$ va fatto a parte perchè ci sono due poli coincidenti)

$$Y_f(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} = \frac{1}{s(s+a)}$$

si ottiene (facendo denominatore comune)

$$A + B = 0 \quad Aa = 1$$

da cui $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{1}{a}$. Quindi la risposta forzata ha l'espressione

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\tfrac{A}{s} + \tfrac{B}{s+a}\right](t) = A\delta_{-1}(t) + Be^{-at}\delta_{-1}(t) \\ &= \tfrac{1}{a}\delta_{-1}(t) - \tfrac{1}{a}e^{-at}\delta_{-1}(t) \end{aligned}$$

L'esercizio chiede di trovare, se possibile, condizioni iniziali in modo che $y(t) = 0$, $\forall t \geq 0$ e quindi

$$y_\ell(t) = -y_f(t) = -\frac{1}{a}\delta_{-1}(t) + \frac{1}{a}e^{-at}\delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

L'evoluzione libera è una combinazione lineare dei modi del sistema $e^{\lambda_1 t} = 1$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{-at}$ (che sono determinati dalle radici del polinomio caratteristico $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -a$; si ricordi che stiamo considerando il caso $a \neq 0$.) Perciò la forma generale dell'evoluzione libera è

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-at}.$$

Per avere

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 e^{-at} = -\frac{1}{a}\delta_{-1}(t) + \frac{1}{a}e^{-at}\delta_{-1}(t) \quad t \geq 0$$

è sufficiente scegliere condizioni iniziali $y(0^-)$ e $\frac{dy}{dt}_{|t=0^-}$ tali che $c_1 = -\frac{1}{a}$ e $c_2 = \frac{1}{a}$. quindi le condizioni

$$\begin{array}{l} y_\ell(0) = c_1 + c_2 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 0 \\ \frac{dy}{dt}_{|t=0^-} = -ac_2 = -a\frac{1}{a} = -1 \end{array}$$

soddisfano la condizione richiesta. Per il caso $a = 0$ si può operare in modo analogo (da fare nella soluzione del compito, non riportato qui perchè segue lo stesso ragionamento utilizzato per il caso $a \neq 0$).

Esercizio 3.

i) [3 punti] L'equazione alle differenze è nella forma "standard" con $n = 2$ ed $m = 3$, quindi la forma generale della risposta impulsiva è

$$h(k) = d_0\delta_(k) + d_1\delta(k-1) + \left[d_2\lambda_1^k + d_3k\lambda_2^k\right]\delta_{-1}(k-2)$$

dove $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ sono le radici del polinomio caratteristico $z^2 - \frac{1}{4} = 0$. Per determinare i coefficienti d_0, d_1, d_2, d_3 basta determinare i primi 4 valori della risposta impulsiva:

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & \frac{1}{4}h(-2) + \delta(-1) - b\delta(-3) = 0 \\ h(1) & = & \frac{1}{4}h(-1) + \delta(0) - b\delta(-2) = 1 \\ h(2) & = & \frac{1}{4}h(0) + \delta(1) - b\delta(-1) = 0 \\ h(3) & = & \frac{1}{4}h(1) + \delta(2) - b\delta(0) = \frac{1}{4} - b \end{array}$$

da cui:

$$\begin{array}{rcl} h(0) & = & d_0 = 0 \\ h(1) & = & d_1 = 1 \\ h(2) & = & d_2\lambda_1^2 + d_2\lambda_2^2 = 0 \\ h(3) & = & d_2\lambda_1^3 + d_2\lambda_2^3 = \frac{1}{4} - b \end{array}$$

risolvendo le ultime due equazioni si ottiene:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{4}(d_2 + d_3) & = & 0 \Rightarrow d_2 = -d_3 \\ \frac{1}{8}(d_2 - d_3) & = & \frac{1}{4} - b \Rightarrow d_2 - d_3 = 2 - 8b \end{array}$$

Esplicitando d_1 e d_2 si ottiene

$$d_2 = 1 - 4b \qquad d_3 = 4b - 1$$

ii) [3 punti] Per calcolare la risposta forzata, operando nel dominio delle trasformate zeta, si ottiene (usando $b = 1$)

$$Y_f(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2 - 1}{z(z^2 - \frac{1}{4})}\frac{z}{z-1} = \frac{z+1}{(z^2 - \frac{1}{4})}$$

Per eseguire l'antitrasformata, come al solito, si può utilizzare l'espansione in fratti semplici

$$Y_{f1}(z) = \frac{1}{z}Y_f(z) = \frac{z+1}{z(z^2 - \frac{1}{4})} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z - \frac{1}{2}} + \frac{C}{z + \frac{1}{2}}$$

dove

$$A = \lim_{z \to 0} zY_{f1}(z) = -4$$

$$B = \lim_{z \to \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) Y_{f1}(z) = 3$$

$$C = \lim_{z \to -\frac{1}{2}} (z + \frac{1}{2}) Y_{f1}(z) = 1$$

da cui:

$$Y_f(z) \ = zY_{f1}(z) = -4 + 3\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$$

e quindi

$$y_f(k) = \mathcal{Z}[Y_f(z)](k) = -4\delta(k) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k) + \left(-\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k)$$