COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
11 luglio 2014

Teoria 1. [5 punti] Si diano le definizioni di Serie e Trasformata di Fourier, si discuta il loro legame e si faccia un esempio di applicazione.

Teoria 2.[5 punti] Si diano la definizioni di stabilità asintotica e BIBO per un sistema lineare tempo invariante (LTI). Si discuta il loro legame con la risposta impulsiva e, per sistemi LTI descritti da un'equazione differenziale a coefficienti costanti, con i coefficienti dell'equazione differenziale.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
11 luglio 2014

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{100s - 1}{(10s + 1)(s^2 + 20s + 10000)}$$

Esercizio 2. [9 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo discreto con funzione di trasferimento

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{6z^4 - z^3 - z^2} \tag{1}$$

i) si discuta la stabilità del sistema descritto da $H(z)$.

ii) si dica quanti "ritardi" (temporali) ci sono tra l'ingresso e l'uscita e si calcoli la risposta impulsiva

iii) si scrivano, se possibile, due diverse equazioni alle differenze che ammettono $H(z)$ come funzione di trasferimento.

Esercizio 3. [6 punti] Si consideri il segnale

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Lambda\left(\frac{t - 8k}{2}\right) - 2\Lambda\left(\frac{t - 8k - 4}{2}\right)$$

ed il sistema a tempo continuo

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bu(t) \qquad t \in \mathbb{R}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

i) Si dica se il segnale $u(t)$ è periodico e se ne dia una rappresentazione in frequenza (tramite serie o trasformata di Fourier)

ii) Si determinino, se possibile, i coefficienti a e b in modo che il sistema faccia passare invariate le componenti "medie" del segnale $u(t)$ (cioè a frequenza nulla) ed invece attenui di un fattore almeno 10 (in ampiezza) le componenti del segnale a frequenza maggiore di $0.3Hz$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -\frac{1}{10^4}\frac{(1 - j\omega 100)}{(1 + j\omega 10)\left(1 + 2j\frac{1}{10}\frac{\omega}{100} - \frac{\omega^2}{10000}\right)}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

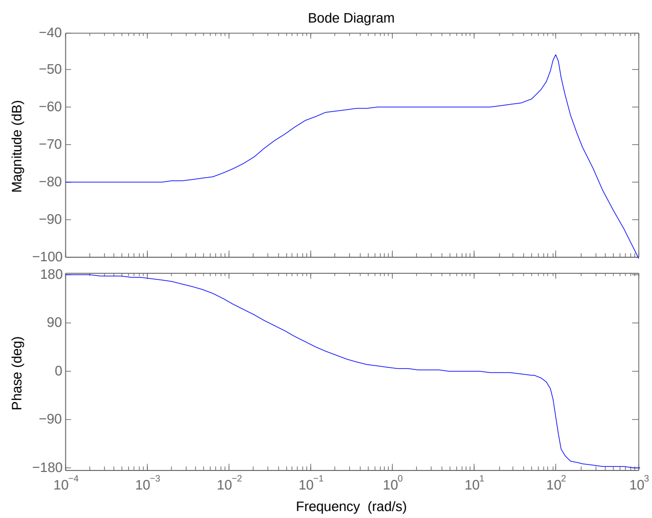

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] La funzione di trasferimento si pu scrivere nella forma:

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{6z^2(z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6})}$$

dove non ci sono cancellazione tra numeratore e denominatore. Il polinomio a denominatore si può fattorizzare nella forma [1]: $d(z) = z^2(z - \frac{1}{2})(z + \frac{1}{3})$. Quindi i poli della funzione di trasferimento sono $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = \frac{1}{2}$, $p_4 = -\frac{1}{3}$. Poichè $|p_i| < 1$, $i = 1, .., 4$, il sistema è BIBO stabile.

Nulla si può dire sulla stabilità asintotica in quanto non è disponibile l'equazione alle differenze. Si può solo affermare che sicuramente esistono equazioni differenziali che descrivono sistemi asintoticamente stabili che ammettono $H(z)$ come funzione di trasferimento, ma anche equazioni differenziali che descrivono sistemi NON asintoticamente stabili che hanno la stessa funzione di trasferimento $H(z)$.

ii) [3 punti] Il numero di ritardi é uguale al grado relativo della funzione di trasferimento (= differenza tra il grado del denominatore ed il grado del numeratore). Quindi in questo caso ci sono 2 ritardi. Questo comunque si vede in maniera esplicita dalla risposta impulsiva calcolata di seguito.

Per calcolare la risposta impulsiva si può utilizzare la relazione

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[H(z)\right](k) \quad k \in Z$$

Per fare l'antitrasformata Zeta si passa attraverso l'espansione in fratti semplici di

$$H_1(z) := \frac{1}{z}H(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z - \frac{1}{2}} + \frac{E}{z + \frac{1}{3}}$$

dove:

$$E = \lim_{z \to -\frac{1}{3}}(z + \frac{1}{3})H_1(z) = -\frac{24}{5}$$

$$D = \lim_{z \to \frac{1}{2}}(z - \frac{1}{2})H_1(z) = -\frac{6}{5}$$

$$C = \lim_{z \to 0} z^3 H_1(z) = 1$$

$$B = \lim_{z \to 0}\frac{d(z^3 H_1(z))}{dz} = -1$$

$$A = \lim_{z \to 0}\frac{1}{2}\frac{d^2(z^3 H_1(z))}{dz^2} = 6$$

Quindi la risposta impulsiva risulta:

$$h(k) = 6\delta(k) - \delta(k-1) + \delta(k-2) - \left[\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{24}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right]\delta_{-1}(k)$$

È immediato verificare che $h(0) = h(1) = 0$, confermando che ci sono due ritardi tra ingresso e uscita (ciè l'uscita all'istante k risente solo degli ingressi che hanno agito fino all'istante $k-2$ compreso). Di conseguenza si può riscrivere $h(k)$ nella forma:

$$h(k) = \delta(k-2) - \left[\frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{24}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right]\delta_{-1}(k-2)$$

[1]Basta trovare le radici del polinomio di secondo grado $z^2 - \frac{1}{6}z - \frac{1}{6}$

iii) Partendo dalla funzione i trasferimento

$$H(z) = \frac{z^2 - 1}{6z^4 - z^3 - z^2}$$

si ottiene l'equazione

$$6y(k) - y(k-1) - y(k-2) = u(k-2) - u(k-4)$$

Alternativamente, è sufficiente moltiplicare il numeratore ed il denominatore della funzione di trasferimento per un fattore comune (ad esempio $(z + 1/4)$):

$$H(z) = \frac{(z^2 - 1)(z + \frac{1}{4})}{(6z^4 - z^3 - z^2)(z + \frac{1}{4})} = \frac{z^3 + \frac{1}{4}z^2 - z - \frac{1}{4}}{6z^5 + \frac{1}{2}z^4 - \frac{5}{4}z^3 - \frac{1}{4}z^2}$$

da cui un'altra equazione alle differenze che ammette $H(z)$ come funzione di trasferimento è:

$$6y(k) + \frac{1}{2}y(k-1) - \frac{5}{4}y(k-2) - \frac{1}{4}y(k-3) = u(k-2) + \frac{1}{4}u(k-3) - u(k-4) - \frac{1}{4}u(k-5)$$

Esercizio 3.

i) [3 punti] Utilizzando il fatto che

$$\Lambda(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$$

si ottiene (utilizzando la regola sulla convoluzione)

$$\mathcal{F}[\Lambda(t)](f) = \mathrm{sinc}^2(f)$$

da cui (utilizzando la regola del cambio di scala)

$$\mathcal{F}[\Lambda(t/T_0)](f) = T_0 \mathcal{F}[\Lambda(t)](T_0 f) = T_0 \mathrm{sinc}^2(T_0 f)$$

Il segnale in questione è chiaramente periodico di periodo $T = 8$ e quindi si può espandere in serie di Fourier. Per calcolare i coefficienti u_k della serie esponenziale di Fourier si può usare la relazione

$$u_k = \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right)$$

dove $U_g(f)$ è la trasformata di Fourier di un segnale generatore. Possiamo scegliere come segnale generatore:

$$u_g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) - 2\Lambda\left(\frac{t-4}{2}\right).$$

Ricordando anche la regola sulla traslazione nel tempo

$$\mathcal{F}[v(t - t_0)](f) = e^{-j2\pi f t_0} V(f)$$

si ottiene:

$$U_g(f) = 2\mathrm{sinc}^2(2f) - 4e^{-j2\pi f 4}\mathrm{sinc}^2(2f) = 2(1 - 2e^{-j8\pi f})\mathrm{sinc}^2(2f).$$

e quindi i coefficienti di Fourier:

$$u_k = \frac{1}{8} U_g\left(\frac{k}{8}\right) = \frac{1}{4}(1 - 2e^{-j\pi k})\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{4}\right). \tag{2}$$

La rappresentazione nel dominio della frequenza del segnale $u(t)$ è quindi:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{-j2\pi \frac{k}{8} t}$$

con u_k dato in (2).

ii) [3 punti] Affinchè il sistema con equazione differenziale assegnate, la cui risposta in frequenza è

$$H(j\omega) = \frac{b}{j\omega + a},$$

si comporti come un passa basso con le specifiche assegnate è necessario che:

1. Il sistema sia BIBO stabile
2. $|H(j\omega)|_{\omega=0} = 1$
3. $|H(j\omega)|_{\omega=2\pi k/8} < \frac{1}{10} \qquad \forall k \quad : \quad |k/8| > 0.3$

Per soddisfare la 1) basta che $a > 0$. Per soddisfare la 2) è sufficiente che $|b| = |a|$. Per soddisfare la 3), poichè $|H(j\omega)|$ è una funzione monotona di $|\omega|$, è sufficiente verificare che[2]

$$|H(j\omega)| < \frac{1}{10} \quad \omega = 2\pi\frac{3}{8} = 2\pi 0.3750$$

e quindi:

$$\frac{a^2}{4\pi^2(0.375)^2 + a^2} < \frac{1}{100}$$

da cui

$$0 < a < \frac{2\pi 0.375}{\sqrt{99}} \simeq 0.2368$$

[2]Le armoniche del segnale per $k = 0, 1, 2$ hanno tutte frequenza inferiore a $0.3Hz$, mentre l'armonica corrispondente a $k = 4$ corrisponde ad una frequenza di $0.375Hz$, la prima maggiore dei $0.3Hz$ richiesti dalle specifiche.