COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
27 giugno 2013

Teoria 1. [5 punti] Si forniscano le definizioni di stabilità asintotica e stabilità BIBO per un sistema LTI e causale descritto da un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti.

È possibile dire se un sistema è asintoticamente stabile conoscendo solo la sua funzione di trasferimento $H(s)$?

Si faccia un esempio di un sistema BIBO stabile ma non asintoticamente stabile.

Teoria 2. [5 punti] Si enunci e si dimostri il Teorema del Campionamento ideale. Si discuta la rilevanza di questo importante risultato nell'ambito della Teoria dei Segnali.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
27 giugno 2013

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + 1000s}{(s+10)(s^2 + 20s + 10000)}$$

Esercizio 2. [6 punti] Si consideri il segnale a tempo continuo

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t-6k}{2}\right) \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

i) Si calcolino i coefficienti di Fourier del segnale $u(t)$.

ii) Si consideri un sistema lineare con funzione di trasferimento

$$H(s) = 100\frac{s^2 + b^2}{s^2 + 3s + \sqrt{2}} \qquad b \in \mathbb{R}$$

con ingresso $u(t)\delta_{-1}(t)$.

Si trovi, se possibile, un valore di b in modo che nell'espansione in serie di Fourier della risposta a regime permanente, ammesso esista, si annulli il coefficiente corrispondente alla frequenza fondamentale.

Esercizio 3. [9 punti] Si consideri il sistema a tempo discreto

$$v(k) + \left(\frac{1}{4} + a\right) v(k-1) + \frac{a}{4} v(k-2) = u(k) + bu(k-2), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

dove a e b sono due parametri reali.

i) Si discuta la stabilità asintotica e BIBO al variare di a e b.

ii) Si calcoli la risposta impulsiva del sistema.

(iii) Assumendo $a = 1/2$ e $b = -1/4$ si calcoli la risposta in transitorio al segnale di ingresso $u(k) = \delta_{-1}(k)$

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = \frac{1}{100} \frac{j\omega(1 + j\omega/1000)}{(1 + j\omega/10)(1 + j2\frac{1}{10}\frac{\omega}{100} - \frac{\omega^2}{100^2})}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

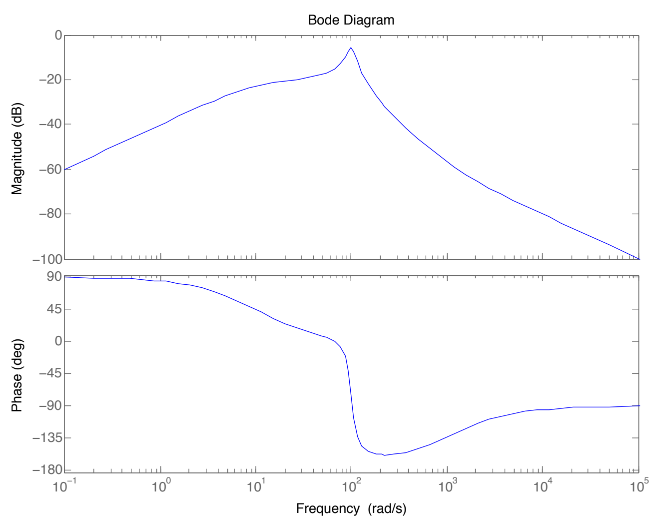


Figura 1. Diagramma di Bode.

ESERCIZIO 2

(i) $w(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Lambda\left(\frac{t-6k}{2}\right)$

$= \text{rep}_T \; \Lambda\left(\frac{t}{2}\right) \qquad T = 6$

- Periodo $T = 6$

Si osservi che

$$\Lambda\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \Pi\left(\frac{t}{2}\right) * \Pi\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\Big\downarrow \mathcal{F}$$

$$\mathcal{F}\left[\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)\right](f) = \frac{1}{2}\left[\; 2^2 \cdot \text{sinc}^2(2f)\right]$$

$$= 2 \;\text{sinc}^2(2f)$$

Si utilizzi ora la regola:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k e^{j2\pi \frac{k}{T} \cdot t}$$

$$\boxed{u_k = \frac{1}{T} U_g\left(\frac{k}{T}\right)} \quad (*)$$

Dove

$$U_g(f) = \mathcal{F}[u_g(t)](f)$$

$$u_g(t) : \quad u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_g(t-kT)$$

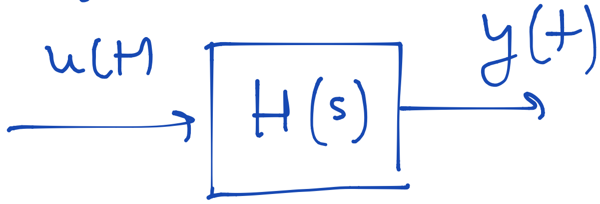
Nel nostro caso il segnale generatore è

$$u_g(t) = \Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$$

e quindi, da $(*)$

$$\boxed{u_k = \frac{2}{6}\cdot \mathrm{sinc}^2\left(\frac{2k}{6}\right) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{k}{3}\right)}$$

(ii) Se



[$H(s) = \dfrac{s^2+b^2}{s^2+3s+\sqrt{2}}$ è BIBO stabile (Basta applicare la regola di CARTESIO)]

Se $H(s)$ è BIBO stabile e $u(t)$ periodico di periodo T

$$\Downarrow$$

$y(t)$ è periodico di periodo T

e $y_k = H(j\omega_k)\, u_k$

$$H(j\omega_k) := H(s)\Big|_{s = j\omega_k = j\frac{2\pi k}{T}}$$

Affinché $y_{\pm 1} = 0$

basta garantire che

$H(j\omega_{\pm 1}) = 0$, cioè

$$H(s)\Big|_{s = \pm j \frac{2\pi}{6}} = 0 \quad (**)$$

$$H(s) = \frac{s^2 + b^2}{s^2 + 3s + \sqrt{2}}$$

(**) VALE se e solo se

$s^2 + b^2 = 0 \qquad s = \pm j \frac{2\pi}{6}$

i.e. se e solo se $\boxed{b = \pm \frac{\pi}{3}}$

ESERCIZIO 3

(i) Equazione caratteristica:

$$p(z) = z^2 + \left(\frac{1}{4} + a\right) z + \frac{a}{4}$$

$$= \left(z + 1/4\right)\left(z + a\right) \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1/4, \; = -a$$

Stabilità Asintotica $\Longleftrightarrow |a| < 1$

$$\left(\left|-\frac{1}{4}\right| < 1\right)$$

$$H(z) = \frac{z^2 + b}{(z + 1/4)(z + a)}$$

Stabilità BIBO

1) Sempre se $|a| < 1$

2) Se $|a| \geq 1$ ed il polinomio z^2+b ha uno zero in $-a$

i.e. $\left. z^2+b \right|_{z=-a} = 0$

se $b < 0$

$$z^2 + b = (z - \sqrt{|b|})(z + \sqrt{|b|})$$

c'è una cancellazione se

$$\sqrt{|b|} = |a|$$

$\Downarrow$

STABILITÀ BIBO $\Rightarrow$ / $\Leftarrow$ $|a| < 1$ oppure $\begin{cases} |a| \geq 1 \\ b = -a^2 \end{cases}$

(ii) $$H(z) = \frac{z^2 + b}{(z + 1/4)(z + a)}$$

$$H_1(z) := \frac{1}{z} H(z) = \frac{z^2 + b}{z(z + 1/4)(z + a)}$$

TRE CASI:

(a) se $a = 1/4$

(b) se $a = 0$

(c) se $a \neq 1/4$, $a \neq 0$

$\Downarrow$

(a) $a = 1/4$

$$H_1(z) = \frac{z^2 + b}{z\,(z + 1/4)^2}$$

$$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z + 1/4} + \frac{C}{(z + 1/4)^2}$$

$A = 16\,b$

$C = -4\left(\frac{1}{16} + b\right)$

$B = 1 - 16\,b$

$$\Rightarrow h(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[H(z) \right](k) =$$

$$= \mathcal{Z}^{-1}\left[A + B\frac{z}{z+1/4} + C\frac{z}{(z+1/4)^2} \right]$$

$$= A\,\delta(k) + B\,(-1/4)^k\,\delta_{-1}(k) +$$

$$+ C \cdot k \cdot (-1/4)^{k-1}\,\delta_{-1}(k)$$

(b) $a = 0$

$$\Rightarrow \frac{H(z)}{z} = \frac{z^2 + b}{z^2(z+1/4)}$$

$$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+1/4}$$

$$C = (b + 1/16)\,16 = 16b + 1$$

$$B = 4b$$

$$A = -16b$$

$$\Rightarrow h(z) = \mathcal{Z}^{-1}\left[H(z) \right](k)$$

$$= -16b\,\delta(k) + 4b\,\delta(k-1) + (16b+1)\left(-1/4\right)^k \delta_{-1}(k)$$

(c) $a \neq 0 \quad a \neq 1/4$

$$H_1(z) = \frac{z^2 + b}{z(z+1/4)(z+a)}$$

$$= \frac{A}{z} + \frac{B}{z+1/4} + \frac{C}{z+a}$$

$$A = \frac{4b}{a}$$

$$B = \frac{b + 1/16}{(a - 1/4)(-1/4)} = \frac{1 + 16b}{1 - 4a}$$

$$c = \frac{a^2 + b}{a(a - 1/4)}$$

$$\Rightarrow h(k) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))(k)$$

$$= A\delta(k) + B\left(-\frac{1}{4}\right)^k \delta_{-1}(k) +$$

$$+ c(-a)^k \delta_{-1}(k)$$

(iii) Assumendo $a = 1/2$, $b = -1/4$

Si ottiene:

$$H(z) = \frac{z^2 - 1/4}{(z + 1/4)(z + 1/2)} = \frac{z - 1/2}{z + 1/4}$$

Operando nel dominio delle trasformate z si ha:

$$U(z) := \mathcal{Z}[u(k)](z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = \frac{z - 1/2}{z + 1/4} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\Downarrow$$

$$Y_1(z) := \frac{1}{z} Y(z) = \frac{z - 1/2}{(z + 1/4)(z-1)}$$

$$= \frac{A}{z + 1/4} + \frac{B}{z-1}$$

$$A = \frac{-1/4 - 1/2}{-1/4 - 1} = \frac{2+1}{4+1} = \frac{3}{5}$$

$$B = \frac{1 - 1/2}{1 + 1/4} = \frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right](k)$$

$$\parallel$$

$$= \underbrace{\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^k \delta_{-1}(k)}_{y_{tr}(k)} + \underbrace{\frac{2}{5}\,\delta_{-1}(k)}_{y_{rp}(k)}$$

$\Rightarrow$ RISPOSTA IN TRANSITORIO

$$\boxed{y_{tr}(k) = \frac{3}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^k \delta_{-1}(k)}$$