COMPITO DI
IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI ED ANALISI DEI DATI
27 giugno 2013

Domanda 1. Si discuta il problema della predizione per un processo stazionario $y(t)$ descritto dal modello lineare

$$y(t) = H(z)e(t)$$

dove $H(z)$ è una funzione razionale ed $e(t)$ è un rumore Gaussiano, bianco a media nulla e varianza σ^2. Si ricavi l'equazione del predittore di un passo assumendo

$$H(z) = \frac{z + \frac{1}{2}}{z - \frac{1}{3}}$$

Domanda 2. Si assuma che dei dati ingresso-uscita $\{u(t), y(t)\}$ siano esattamente generati dal modello FIR

$$y(t) = u(t-1) + \frac{1}{3}u(t-2) + \frac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)$$

dove $e_0(t)$ è un rumore bianco Gaussiano, a media nulla e varianza $\sigma^2 = 1$. Si assuma che anche $u(t)$ sia un rumore bianco Gaussiano a media nulla e varianza $\sigma_u^2 = 2$, indipendente da $e_0(t)$. Si utilizzi un modello del tipo

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + e(t)$$

per fare identificazione utilizzando il metodo dei minimi quadrati.

1. Supponendo siano disponibili dati $y(t)$, $t = 1, .., N$ e $u(t)$, $t = 0, .., N$, si scriva l'espressione dello stimatore $\hat{\theta}_N$ ai minimi quadrati del parametro vettoriale $\theta := [b_0\ b_1]^\top$ (in questo caso esiste un'espressione in forma chiusa).

2. Si dica dove converge lo stimatore $\hat{\theta}_N$ per $N \to \infty$.

3. Facendo l'approssimazione[1]

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \psi(t)\psi^\top(t) \simeq E[\psi(t)\psi^\top(t)] = R_1 = \sigma_u^2 I$$

   dove $\psi(t) := [u(t)\ u(t-1)]^\top$, si ricavi l'espressione della varianza dello stimatore $\hat{\theta}_N$.

Domanda 3. Si assuma che la posizione di un veicolo mobile sul piano possa essere descritta dalle coordinate del suo centro di massa $x(t) \in \mathbb{R}^2$. Viene utilizzato un sistema di localizzazione per fare il tracking di due veicoli (A e B). Si assuma che le traiettorie (discretizzate) $x_A(t) \in \mathbb{R}^2$ e $x_B(t) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{Z}$ dei due veicoli possano essere modellate indipendentemente come due passeggiate aleatorie integrate, cioé nella forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_A(t+1) & = & x_A(t) + v_A(t) \\ v_A(t+1) & = & v_A(t) + n_A(t) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x_B(t+1) & = & x_B(t) + v_B(t) \\ v_B(t+1) & = & v_B(t) + n_B(t) \end{array}\right.$$

con $n_A(t)$ ed $n_B(t)$ rumori bianchi, indipendentie, a media zero e varianza σ_n^2.

[1] Questa apprrossimazione è giustificata purchè N sia "grande"

1. Si assuma che le misure a disposizione $z(t)$ provengano *alternativamente* dal veicolo A e B, cioè che

$$z(t) = \begin{cases} x_A(t) + n(t) & t = 1, 3, 5, ..., (2k+1), ... \quad k \in \mathbb{Z}^+ \\ x_B(t) + n(t) & t = 2, 4, 6, ..., 2k, ... \quad k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

   In questo caso si dice che si conosce *l'associazione* delle misure. Si scriva un filtro di Kalman per la stima delle posizioni $x_A(t)$ e $x_B(t)$.

2. Si assuma che a partire dall'istante $t = \bar{t}$ non si abbia più informazione sull'associazione delle misure, i.e. non si sa se $z(t)$, $t \geq \bar{t}$ proviene dal veicolo A o dal veicolo B. Assumendo che, per $t \geq \bar{t}$, le misure $z(t)$ provengano *con eguale probabilitá* (ed in maniera indipendente ad ogni istante di tempo) dai due veicoli,

   - si calcoli la probabilità (condizionata da tutte le misure fatte fino all'istante $\bar{t} - 1$) che la misura all'istante $t = \bar{t}$ provenga dal veicolo A
   - si discuta come si potrebbe procedere per continuare a stimare la posizione dei due veicoli senza avere a disposizione l'informazione di associazione delle misure

Domanda 4. Sia $y(kT_c)$, $k \in \mathbb{Z}$ la misura di un encoder fissato ad una ruota di un veicolo che si muove con velocità costante v_c. Si assuma che l'encoder fornisca una misura rumorosa della posizione reale dalla ruota $p(kT_c)$, ciè

$$y(kT_c) = p(kT_c) + n(kT_c)$$

dove $n(kT_c)$ è un rumore Gaussiano, bianco, a media nulla e varianza σ^2 incognita. Supponendo di avere a disposizione misure nell'intervallo $k \in [1, T]$:

1. Si scriva lo stimatore dei minimi quadrati $\hat{\theta}_{LS}$ per il parametro vettoriale $\theta := [x_c v_c]^\top$ dove x_c è la posizione iniziale e v_c la velocità del veicolo.
2. Si scriva lo stimatore a massima verosimiglianza della varianza σ^2.
3. Come si potrebbe modificare lo stimatore se v_c fosse "lentamente variante"?

Suggerimento: si osservi che $p(kT_c) = x_c + v_c k T_c$.

SOLUZIONI

Domanda 1.[8 Punti]

1. Per la formulazione del problema di predizione si vedano gli appunti.
2. Dato che $H(z)$ è stabile e ad inversa stabile, il predittore si ottiene dall'equazione

$$\begin{aligned}\hat{y}(t|t-1) &= (H(z)-h(0))\,H^{-1}(z)y(t) = \left(\tfrac{z+1/2}{z-1/3}-1\right)\tfrac{z-1/3}{z+1/2}y(t)\\ &= \tfrac{z+1/2-z+1/3}{z+1/2}y(t) = \tfrac{5}{6}\tfrac{1}{z+1/2}y(t)\end{aligned}$$

cioè:

$$\hat{y}(t|t-1)+\frac{1}{2}\hat{y}(t-1|t-2)=\frac{5}{6}y(t-1)$$

Domanda 2.[8 Punti]

1. Lo stimatore PEM si ottiene risolvendo

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_N &:= \arg\min_\theta \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N(y(t)-\hat{y}_\theta(t|t-1))^2\\ &= \arg\min_\theta \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N(y(t)-\psi^\top(t)\theta)^2\end{aligned}$$

dove $\theta=[b_0\ b_1]^\top$ e $\psi(t):=[u(t)\ u(t-1)]^\top$. Svolgendo i calcoli si ricava che l'unico punto di minimo è data da:

$$\hat{\theta}_N=\left[\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N\psi(t)\psi^\top(t)\right]^{-1}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N\psi(t)y(t)$$

2. Come noto dalla Teoria, lo stimatore PEM converge, per $N\to\infty$, all'insieme dei punti di minimo del funzionale

$$J(\theta):=E[(y(t)-\hat{y}_\theta(t|t-1))^2]$$

Usando il fatto che i dati $y(t)$ sono generati dal modello

$$y(t)=u(t-1)+\frac{1}{3}u(t-2)+\frac{1}{4}u(t-3)+e_0(t)$$

il funzionale $J(\theta)$ risulta:

$$\begin{aligned}J(\theta) &= E\left[\left(u(t-1)+\tfrac{1}{3}u(t-2)+\tfrac{1}{4}u(t-3)+e_0(t)-b_0u(t)-b_1u(t-1)\right)^2\right]\\ &= E\left[\left((-b_0)\,u(t)+(1-b_1)\,u(t-1)+\tfrac{1}{3}u(t-2)+\tfrac{1}{4}u(t-3)+e_0\right)^2\right]\\ &= b_0^2\sigma_u^2+(1-b_1)^2\,\sigma_u^2+\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\sigma_u^2+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2\sigma_u^2+\sigma^2\end{aligned}$$

dove si è usato il fatto che $u(t)$ è un rumore bianco e che $\{e_0(t)\}$ è indipendente (e quindi scorrelato) da $\{u(t)\}$. Chiaramente, l'unico punto di minimo di $J(\theta)$ è

$$\begin{cases} b_0=0\\ b_1=1\end{cases}$$

e quindi $\hat{\theta}_N\to[0\ 1]^\top$.

3. Si osservi preliminarmente che $E\hat{\theta}_N = \theta_0 := [0\ 1]^\top$; si noti anche che si può scrivere:

$$y(t) = u(t-1) + \frac{1}{3}u(t-2) + \frac{1}{4}u(t-3) + e_0(t) = \psi^\top(t)\theta_0 + \frac{1}{3}u(t-2) + \frac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)$$

Per calcolare la varianza, esprimiamo lo stimatore nella seguente forma:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_N &= \left[\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N \psi(t)\psi^\top(t)\right]^{-1} \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N \psi(t)y(t) \\
&= \left[\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N \psi(t)\psi^\top(t)\right]^{-1} \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N \psi(t)\left(\psi^\top(t)\theta_0 + \tfrac{1}{3}u(t-2) + \tfrac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)\right) \\
&= \theta_0 + \left[\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N \psi(t)\psi^\top(t)\right]^{-1} \tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N \psi(t)\left(\tfrac{1}{3}u(t-2) + \tfrac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)\right) \\
&\simeq \theta_0 + \tfrac{1}{\sigma_u^2}\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{t=1}^N \psi(t)\left(\tfrac{1}{3}u(t-2) + \tfrac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)\right)
\end{aligned}$$

dove si è usata l'approssimazione suggerita

$$\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N \psi(t)\psi^\top(t) \simeq E[\psi(t)\psi^\top(t)] = \sigma_u^2 I \tag{1}$$

Di conseguenza si ottiene:

$$\tilde{\theta}_N := \hat{\theta}_N - E\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N - \theta_0 \simeq \frac{1}{\sigma_u^2}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^N \psi(t)\left(\frac{1}{3}u(t-2) + \frac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)\right)$$

Si osserche che, per costruzione, $E\tilde{\theta}_N = 0$.
Ci rimane da calcolare la varianza di $\tilde{\theta}_N$; definendo $w(t) := \frac{1}{3}u(t-2) + \frac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)$, si ottiene: [2]:

$$Var\{\tilde{\theta}_N\} \simeq \tfrac{1}{\sigma_u^4}\tfrac{1}{N^2}\textstyle\sum_{t=1}^N\sum_{s=1}^N E\left[\left(\psi(t)w(t)\right)\left(\psi(s)w(s)\right)^\top\right]$$

Usando il fatto che $\{u(t)\}$ e $\{e_0(t)\}$ sono Gaussiani, bianchi (e quindi a componenti indipendenti) e indipendenti si verifica facilmente che:

$$E\left[\psi(t)\left(\tfrac{1}{3}u(t-2) + \tfrac{1}{4}u(t-3) + e_0(t)\right)\left(\psi(s)\left(\tfrac{1}{3}u(s-2) + \tfrac{1}{4}u(s-3) + e_0(s)\right)\right)^\top\right] =$$

$$= \begin{cases} \sigma_u^2 I\left(\frac{1}{9}\sigma_u^2 + \frac{1}{16}\sigma_u^2 + \sigma^2\right) & t = s \\ \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sigma_u^2}{12} & t = s+1 \\ \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sigma_u^2}{12} & t = s-1 \\ 0 & t \neq s \end{cases}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
Var\{\tilde{\theta}_N\} &\simeq \tfrac{1}{\sigma_u^4}\tfrac{1}{N^2}\textstyle\sum_{t=1}^N \sigma_u^2 I\left(\tfrac{1}{9}\sigma_u^2 + \tfrac{1}{16}\sigma_u^2 + \sigma^2\right) + \\
&\quad + \tfrac{1}{\sigma_u^4}\tfrac{1}{N^2}\textstyle\sum_{t=2}^N \tfrac{\sigma_u^4}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \\
&\quad + \tfrac{1}{\sigma_u^4}\tfrac{1}{N^2}\textstyle\sum_{t=1}^{N-1} \tfrac{\sigma_u^4}{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \tfrac{1}{N}\left[\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{\sigma^2}{\sigma_u^2}\right) I\right] + \tfrac{N-1}{N^2}\tfrac{1}{12}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Domanda 3.[8 Punti]

[2] Il "circa" uguale è dovuto all'approssimazione suggerita (1)

1. Basta definire uno stato $s(t) := [x_A^\top(t)\ v_A^\top(t)\ x_B^\top(t)\ v_B^\top(t)]^\top$. Utilizzando i modelli per $x_A(t)$ e $x_B(t)$ proposeti nel testo dell'esercizio si ottiene:

$$s(t+1) = As(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ n_A(t) \\ 0 \\ n_B(t) \end{bmatrix} \quad A := \begin{bmatrix} I & I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & I \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \tag{2}$$

e come equazione di misura

$$z(t) = C(t)s(t) + n(t) \quad C(t) := \begin{cases} \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & t = 2k+1 \ \ k \in \mathbb{Z}^+ \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} & t = 2k \qquad k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \tag{3}$$

I rumori di misura e di modello si possono assumere scorrelati e quindi:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n^2 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n^2 I \end{bmatrix} \quad S = [0\ 0\ 0\ 0]^\top \quad R = \sigma^2 I$$

dove $Var\{n_A(t)\} = Var\{n_B(t)\} = \sigma_n^2 I$ e $Var\{n(t)\} = \sigma^2 I$. Per ottenere la stima dello stato (e quindi delle posizioni $x_A(t)$ e $x_B(t)$ è ora sufficiente applicare le equazioni del filtro di Kalman (si vedano gli appunti) al modello tempo variante descritto da (2) e (3).

2. Assumendo che i rumori in gioco e le condizioni iniziali siano delle variabili Gaussiane, anche lo stato e le misure sono variabili Gaussiane (perch trasformazioni lineari di variabili Gaussiane).

   Quindi anche la densità condizionata di $x_A(\bar{t})$ date le misure fino all'istante $\bar{t}-1$ è Gaussiana con media
$$\hat{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1) = [I\ 0\ 0\ 0]\hat{s}(\bar{t}|\bar{t}-1)$$
   e matrice varianza

$$\Sigma_A(\bar{t}|\bar{t}-1) := \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P(\bar{t}|\bar{t}-1) \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   dove $\hat{s}(\bar{t}|\bar{t}-1)$ e $P(\bar{t}|\bar{t}-1)$ sono, rispettivamente la predizione dello stato e la varianza dell'errore di predizione che si ottengono dalle equazioni del filtro di Kalman. Quindi $x_A(\bar{t})$ condizionata dalle misure fino all'istante $\bar{t}-1$ e' $\mathcal{N}(\hat{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1), \Sigma_A(\bar{t}|\bar{t}-1))$. Usando lo stesso tipo di notazione $x_B(\bar{t})$ condizionata dalle misure fino all'istante $\bar{t}-1$ e' $\mathcal{N}(\hat{x}_B(\bar{t}|\bar{t}-1), \Sigma_B(\bar{t}|\bar{t}-1))$ dove
$$\hat{x}_B(\bar{t}|\bar{t}-1) = [0\ 0\ I\ 0]\hat{s}(\bar{t}|\bar{t}-1)$$
   e

$$\Sigma_B(\bar{t}|\bar{t}-1) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \end{bmatrix} P(\bar{t}|\bar{t}-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Indicando con $A_{\bar{t}}$ l'evento $\{la\ \ misura\ \ z(\bar{t})\ \ arriva\ \ dal\ \ veicolo\ \ A\}$ e con $B_{\bar{t}} := \bar{A}_{\bar{t}}$ l'evento complementare che la misura $z(\bar{t})$ proviene da B, usando la regola di Bayes:

$$P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}) \in I, z(\bar{t}-1), ..., z(1)] = \frac{P[z(\bar{t}) \in I|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1), ..., z(1)]P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}-1), ..., z(1)]}{P[z(\bar{t}) \in I|z(\bar{t}-1), ..., z(1)]}$$
$$= \frac{P[z(\bar{t}) \in I|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1), ..., z(1)]P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}-1), ..., z(1)]}{P[z(\bar{t}) \in I|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1), ..., z(1)]P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}-1), ..., z(1)] + P[z(\bar{t}) \in I|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1), ..., z(1)]P[B_{\bar{t}}|z(\bar{t}-1), ..., z(1)]}$$

dove I è un generico insieme sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ e, per ipotesi,

$$P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}-1),...,z(1) = P[B_{\bar{t}}|z(\bar{t}-1),...,z(1)] = 1/2$$

Si definisca $z_0 := [x_0\ y_0]^\top$ e si ponga $I := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [x_0, x_0+\Delta)\ \ y \in [y_0, y_0+\Delta)\}$; facendo il limite per $\Delta \to 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}) = z_0, z(\bar{t}-1),...,z(1)] &= \frac{f_{z(\bar{t})}(z_0|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))1/2}{f_{z(\bar{t})}(z_0|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))1/2 + f_{z(\bar{t})}(z_0|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))1/2} \\ &= \frac{f_{z(\bar{t})}(z_0|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))}{f_{z(\bar{t})}(z_0|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1)) + f_{z(\bar{t})}(z_0|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))} \end{aligned} \tag{4}$$

dove $f_{z(\bar{t})}(z_0|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))$ e $f_{z(\bar{t})}(z_0|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))$ sono le densità $z(\bar{t})$ condizionate dalle misure passate fino all'istante $\bar{t}-1$ e, rispettivamente, dagli eventi $A_{\bar{t}}$ e $B_{\bar{t}}$.

Poiché sotto la condizione $A_{\bar{t}}$ si ha $z(\bar{t}) = x_A(\bar{t}) + n(t) = \hat{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1) + \tilde{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1) + n(t)$ allora $z(\bar{t})$ condizionata dall'evento $A_{\bar{t}}$ e dalle misure $z(\bar{t}-1),...,z(1)$ è una variabile Gaussiana a media $\hat{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1)$ e matrice varianza

$$Var\{\tilde{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1) + n(t)\} = \Sigma_A(\bar{t}|\bar{t}-1) + \sigma^2 I$$

e quindi

$$\begin{aligned} &f_{z(\bar{t})}(z_0|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1)) = \\ &\quad = \frac{1}{(2\pi)^2 \det(\Sigma_A(\bar{t}|\bar{t}-1)+\sigma^2 I)} e^{-\frac{1}{2}(z_0-\hat{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1))^\top \left(\Sigma_A(\bar{t}|\bar{t}-1)+\sigma^2 I\right)^{-1}(z_0-\hat{x}_A(\bar{t}|\bar{t}-1))} \end{aligned}$$

Un discorso analogo vale per $f_{z(\bar{t})}(z_0|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1))$, quindi $z(\bar{t})$ condizionata dall'evento $B_{\bar{t}}$ e dalle misure $z(\bar{t}-1),...,z(1)$ è una variabile Gaussiana a media $\hat{x}_B(\bar{t}|\bar{t}-1)$ e matrice varianza

$$Var\{\tilde{x}_B(\bar{t}|\bar{t}-1) + n(t)\} = \Sigma_B(\bar{t}|\bar{t}-1) + \sigma^2 I$$

e quindi

$$\begin{aligned} &f_{z(\bar{t})}(z_0|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}-1),...,z(1)) = \\ &\quad = \frac{1}{(2\pi)^2 \det(\Sigma_B(\bar{t}|\bar{t}-1)+\sigma^2 I)} e^{-\frac{1}{2}(z_0-\hat{x}_B(\bar{t}|\bar{t}-1))^\top \left(\Sigma_B(\bar{t}|\bar{t}-1)+\sigma^2 I\right)^{-1}(z_0-\hat{x}_B(\bar{t}|\bar{t}-1))} \end{aligned}$$

Questi elementi sono sufficienti quindi a calcolare $P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}) = z_0, z(\bar{t}-1),...,z(1)]$ come richiesto dal testo, i.e. usando (4).

3. Se non si conosce l'associazione di può procedere usando il risultato del punto precendente. Avendo a disposizione la misura $z(\bar{t}) = z_0$ si possono calcolare $P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}) = z_0, z(\bar{t}-1),...,z(1)]$ e $P[B_{\bar{t}}|z(\bar{t}) = z_0, z(\bar{t}-1),...,z(1)] = 1 - P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}) = z_0, z(\bar{t}-1),...,z(1)]$. Quindi $f(s(\bar{t})|z(\bar{t}),....,z(1))$, i.e. la densità condizionata di $s(\bar{t})$ date le misure fino all'istante $\bar{t}$ si può calcolare usando il teorema della probabilitá totale

$$\begin{aligned} f(s(\bar{t})|z(\bar{t}),....,z(1)) &= f(s(\bar{t})|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}),....,z(1))P[A_{\bar{t}}|z(\bar{t}),....,z(1)] + \\ &\quad + f(s(\bar{t})|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}),....,z(1))P[B_{\bar{t}}|z(\bar{t}),....,z(1)] \\ &= \frac{1}{2}\left(f(s(\bar{t})|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}),....,z(1)) + f(s(\bar{t})|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}),....,z(1))\right) \end{aligned}$$

dove $f(s(\bar{t})|A_{\bar{t}}, z(\bar{t}),....,z(1))$ ed $f(s(\bar{t})|B_{\bar{t}}, z(\bar{t}),....,z(1))$ si ottengono usando le equazioni classiche del filtro di Kalman in quando l'associazione $A_{\bar{t}}$ oppure $B_{\bar{t}}$ sono note.

Domanda 4.[8 Punti]

1. Sotto le condizioni descritte nel testo le misure si possono riscrivere nella forma:

$$\begin{aligned} Y &:= \begin{bmatrix} y(T_c) \\ y(2T_c) \\ \vdots \\ y(TT_c) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & T_c \\ 1 & 2T_c \\ \vdots & \\ 1 & TT_c \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} n(T_c) \\ n(2T_c) \\ \vdots \\ n(TT_c) \end{bmatrix} \\ &= S\theta + N \end{aligned}$$

con ovvio significato dei simboli. Lo stimatore ai minimi quadrati (si vedano gli appunti) è dato dall'equazione

$$\hat{\theta}_{LS} = \left(S^\top S\right)^{-1} S^\top Y$$

2. Basta scrivere la funzione di verosimiglianza (che è una Gaussiana dato che il rumore è Gaussiano) in funzione di θ e σ^2, i.e.

$$L(\theta) := -\log p_\theta(y(T_c), ..., p(TT_c)) = \frac{T}{2}\log(2\pi) + \frac{T}{2}\log(\sigma^2) + \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{(y(tT_c) - (1 \ \ tT_c)\theta)^2}{\sigma^2}$$

poi minimizzare in θ e σ^2. La minimizzazione in θ restituisce lo stimatore ai minimi quadrati (si vedano gli appunti) e gli esercizi fatti a lezione mentre lo stimatore di σ^2 risulta, come ricavato a lezione, uguale a

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(y(tT_c) - (1 \ \ tT_c)\hat{\theta}_{LS})^2$$

(basta fare la derivata in σ^2 della log-verosimiglianza ed eguagliarla a zero.

3. Se il parametro è tempo variante si possono usare i minimi quadrato con fattore d'oblio, i.e minimizzare

$$J_{LS}(\theta) := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\lambda^{T-t}\|y(tT_c) - (1 \ tT_c)\theta\|^2 \quad 0 < \lambda \leq 1$$

oppure usare il filtro di Kalman imponendo che la varianza dell'errore di modello sulla velocit v_c sia strettamente positiva (si vedano gli appunti a riguardo).