COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
11 febbraio 2013

Teoria 1. [5 punti] Con riferimento ad un sistema lineare descritto da un'equazione alle differenze (lineare, a coefficienti costanti) di ordine n, si discuta la struttura della soluzione generale (evoluzione libera e risposta forzata) illustrando quali sono i passi fondamentali per calcolarla. Si ricavi, operando nel dominio delle trasformate, la forma generale della risposta forzata del sistema (espressa nel dominio del tempo).

Teoria 2. [5 punti] Si diano le definizioni di serie e trasformata di Fourier. Si illustri il loro legame per segnali periodici di periodo T.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
11 febbraio 2013

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = 100\frac{(s^2-1)}{(s+100)(s^2+s+100)}$$

Esercizio 2. [6 punti] Si consideri il modello ingresso/uscita a tempo continuo e causale descritto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + a\frac{d^2y(t)}{dt^2} + (a-1)\frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + bu(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

dove a e b sono due parametri reali

i) **[3 punti]** Si studino, al variare di a e b, la stabilità asintotica e la stabilità BIBO del sistema.

Assumendo nel seguito dell'esercizio $a = 1$ e $b = 0$:

ii) **[3 punti]** si determinino, se possibile, opportune condizioni iniziali ed un ingresso in corrispondenza dei quali l'uscita del sistema converge a zero per $t \to +\infty$.

Esercizio 3. [9 punti] Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dall'equazione differenziale

$$\frac{dy(t)}{dt} = ay(t) + au(t), \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

e si definisca il segnale campionato $y_c(k) := y(k\Delta)$ dove $\Delta > 0$ è il passo di campionamento (fissato). Assumendo che l'ingresso $u(t)$ sia costante tra un istante di campionamento e l'altro, cioè che

$$u(t) = u_c(k), \forall k, t \quad : \quad t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$$

i) **[4 punti]** Si dimostri[1] che il segnale campionato $y_c(k)$ soddisfa all'equazione alle differenze

$$y_c(k+1) = e^{a\Delta}y_c(k) + (e^{a\Delta}-1)u_c(k), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

ii) **[2 punti]** Si discuta la relazione tra la stabilità (asintotica) del sistema a tempo continuo (1) e del sistema a tempo discreto (2). La risposta era prevedibile?

iii) **[3 punti]** Si consideri il segnale di ingresso

$$u(t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi(t-3k), \quad t \in \mathbb{R}$$

e sia $y(t)$ la corrispondente uscita. Si determini, se possibile, un opportuno valore di a affinchè le armoniche di ordine maggiore di 3 del segnale di uscita siano attenuate di almeno un fattore 2 in potenza.

[1] Suggerimento: si usi l'espressione dell'uscita al tempo $t = (k+1)\Delta$ in funzione della condizione iniziali all'istante $t_0 = k\Delta$ e con ingresso $u(t) = u_c(k)$ nell'intervallo $t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -10^{-2} \frac{(1 - j\omega)\,(1 + j\omega)}{\left(1 + j\frac{\omega}{100}\right)\left(1 + 2\frac{1}{20}\frac{j\omega}{10} - \frac{\omega^2}{100}\right)}.$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

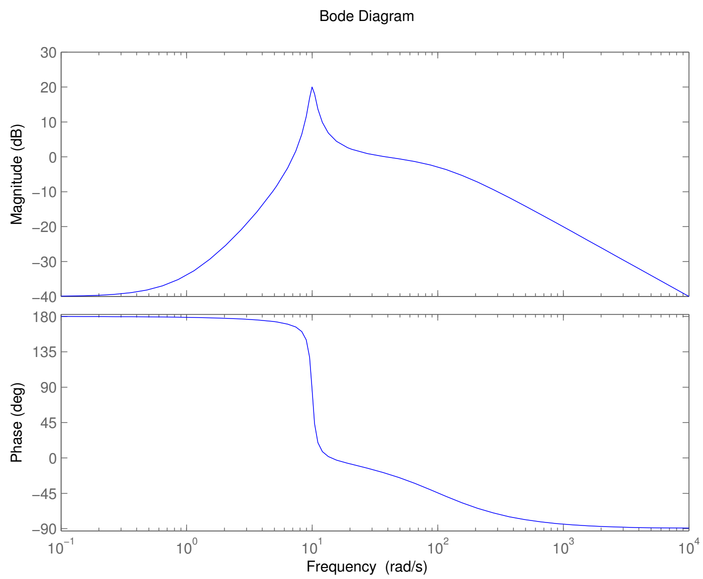

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Il polinomio caratteristico risulta $s(s^2 + as + (a - 1))$, le cui radici sono $\lambda_1 = 0$, λ_2 e λ_3, dove λ_2 e λ_3 sono radici del polinomio $(s^2 + as + (a - 1))$. Poichè, $\forall a$, $\lambda_1 = 0$ è radice, il sistema non è mai asintoticamente stabile. La funzione di trasferimento è

$$H(s) = \frac{s + b}{s(s^2 + as + (a - 1))}$$

In assenza di cancellazioni tra numeratore e denominatore i poli del sistema sono le radici del polinomio caratteristico. Poiche $\lambda_1 = 0$ è sempre radice del polinomio caratteristico. Il sistema può essere BIBO stabile solo se la radice in 0 del polinomio caratteristico viene cancellata e quindi se $b = 0$. In questo caso bisogna studiare il segno della parte reale dei poli del sistema. In particolare, se $b = 0$, la funzione di trasferimento risulta:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + as + (a - 1)} = \frac{1}{(s - \lambda_2)(s - \lambda_3)}$$

Utilizzando la regola dei segni di Cartesio, le radici λ_2, λ_3 hanno:

- entrambe parte reale negativa se $a > 1$
- una positiva o nulla e una negativa se $a \leq 1$.

Di conseguenza il sistema è BIBO stabile se e solo se $b = 0$ e $a > 1$.

ii) [3 punti] Per $a = 1$ e $b = 0$ il sistema non è ne asintoticamente ne BIBO stabile. Il polinomio caratteristico é

$$p(s) = s^2(s+1)$$

e la funzione di trasferimento risulta

$$H(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Di conseguenza l'evoluzione libera ha la forma

$$y_\ell(t) = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-t}$$

e la risposta forzata si può scrivere nella forma

$$y_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y_f(s)\right](t) = \mathcal{L}^{-1}\left[H(s)U(s)\right](t)$$

Per quanto riguarda l'evoluzione libera, è sufficiente notare che, imponendo $c_1 = c_2 = 0$ e $c_3 = 1$ in modo da avere

$$y_\ell(t) = e^{-t}$$

si ha:

$$y_\ell(0) = 1 \quad \frac{dy_\ell(t)}{dt}_{|t=0} = -1 \quad \frac{d^2 y_\ell(t)}{dt^2}_{|t=0} = 1$$

Per quanto riguarda la risposta forzata, scegliendo

$$U(s) = \frac{s}{s+2}$$

si ottiene

$$Y_f(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

e quindi

$$y_f(t) = \left(Ae^{-t} + Be^{-2t}\right)\delta_{-1}(t)$$

In conclusione scegliendo:

$$y(0) = 1 \quad \frac{dy(t)}{dt}_{|t=0} = -1 \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2}_{|t=0} = 1$$

e

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Us)\right](t) = \delta(t) - 2e^{-2t}\delta_{-1}(t)$$

si ottiene

$$y(t) = y_\ell(t) + y_f(t) = e^{-t} + Ae^{-t} + Be^{-2t} \quad t \geq 0$$

che, chiaramente, tende a zero per $t \to \infty$.

NOTA: si osservi che, ovviamente, si potevano anche scegliere condizioni iniziali e/o ingresso identicamente nulli. Ho preferito NON riportare questa soluzione che avrei dovuto escludere nel testo dell'esercizio. In aggiunta, sebbene non esplicitamente menzionato nel testo, sono di norma da escludere ingressi la cui trasformata di Laplace non è propria. Queste soluzioni richiederebbero che l'ingresso contenesse derivata dell'impulso, che chiaramente non è fisicamente sensato.

Esercizio 3.

i) [4 punti] È sufficiente osservare che il segnale $y(t)$, $t = \Delta$ si può scrivere nella forma

$$y(\Delta) = y_\ell(\Delta) + y_f(\Delta)$$

dove $y_\ell(\Delta)$ è l'evoluzione libera del sistema a partire da condizione iniziale $y_0 = y(0)$ mentre $y_f(\Delta)$ è la risposta forzata all'ingresso $u(t)$, $t \in [0, \Delta)$. L'equazione caratteristica del sistema è $p(s) = s - a$ e quindi l'evoluzione libera ha la forma $y_\ell(t) = y(0)e^{at}$. La risposta forzata può essere scritta nella forma

$$y_f(t) = \int_0^t u(t-\tau)g(\tau)\, d\tau$$

dove $h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(s))(t)$ è la risposta impulsiva e

$$H(s) = \frac{a}{s-a}$$

è la funzione di trasferimento. Calcolando l'antitrasformata di Laplace si ottiene: $h(t) = ae^{at}\delta_{-1}(t)$. Di conseguenza si ha:

$$\begin{array}{rcl} y(\Delta) & = & y_\ell(\Delta) + y_f(\Delta) = e^{a\Delta}y(0) + \int_0^\Delta ae^{a\tau}\, d\tau u_c(0) \\ & = & e^{a\Delta}y(0) + (e^{a\Delta} - 1)u_c(0) \end{array}$$

dove si è usato il fatto che $u(t) = u_c(k)$, $\forall t, k \; : \; t \in [k\Delta, (k+1)\Delta)$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$. Usando ora la tempo invarianza del sistema e la struttura dell'ingresso (costante negli intervalli di campionamento) si ottiene

$$\begin{array}{rcl} y_c((k+1)) & := & y((k+1)\Delta) \\ & = & e^{a\Delta}y(k\Delta) + (e^{a\Delta} - 1)u_c(k) \\ & = & e^{a\Delta}y_c(k) + (e^{a\Delta} - 1)u_c(k) \end{array}$$

ii) [2 punti] Il sistema a tempo continuo è asintoticamente stabile se le radici del polinomio caratteristico $p(s) = s - a$ sono a parte reale negativa e quindi se e solo se $a < 0$ Il sistema discretizzato è stabile se e solo se le radici dell'equazione caratteristica $p(z) = z - e^{a\Delta}$ hanno modulo minore di uno e quindi se e solo se $|e^{a\Delta}| < 1$. Chiaramente quest'ultima condizione vale se e solo se $a < 0$ indipendentemente dal valore di $\Delta > 0$. Quindi il sistema a tempo continuo e quello a tempo discreto che si ottiene campionandolo sono asintoticamente stabili sotto la stessa condizione $a < 0$.

iii) [3 punti] L'ingresso scelto $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Pi(t - 3k)$ è un segnale periodico di periodo $T = 3$ e quindi si può sviluppare in serie di Fourier

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{3}.$$

Se il sistema è BIBO stabile (e quindi se $a < 0$) l'uscita a regime permanente $y(t)$ è un segnale periodico di periodo $T = 3$ e quindi ammette un'espansione in serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{j2\pi k f_0 t} \quad y_k = H(j2\pi k f_0)u_k$$

dove

$$H(j2\pi f) = \frac{a}{j2\pi f - a}$$

è la risposta in frequenza del sistema. Affinchè le armoniche di ordine maggiore di 3 subiscano un'attenuazione in potenza di un fattore due si deve avere

$$\frac{\|y_k\|^2}{\|u_k\|^2} = \|H(j2\pi k f_0)\|^2 < \frac{1}{2} \quad \forall |k| > 3$$

e quindi

$$\|H(j2\pi k f_0)\|^2 = \frac{a^2}{a^2 + 4\pi^2 k^2 f_0^2} < \frac{1}{2} \quad |k| > 3 \tag{3}$$

Poichè $\|H(j2\pi k f_0)\|^2$ è un funzione monotona decrescente di $|k|$ è sufficiente verificare la condizione (3) per $|k| = 4$. Quindi:

$$2a^2 < \frac{4\pi^2 16}{9} + a^2$$

da cui (usando anche che $a < 0$ per la stabilità)

$$-\frac{8}{3}\pi < a < 0$$