COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
23 luglio 2012

Teoria 1. [5 punti] Si diano le definizioni di Serie e Trasformata di Fourier e si discuta il legame tra serie e trasformata di Fourier per segnali $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, periodici di periodo T.

Teoria 2.[5 punti] Si definiscano i concetti di stabilità asintotica e stabilità BIBO e si forniscano criteri per la stabilità asintotica e BIBO di sistemi LTI a tempo continuo descritti da equazioni differenziali. In particolare si dimostri il teorema che lega la proprietà di stabilità con la risposta impulsiva del sistema.

NOTA: le risposte vanno adeguatamente giustificate.

COMPITO DI SEGNALI E SISTEMI
23 luglio 2012

Esercizio 1. [5 punti] Si tracci il diagramma di Bode (modulo e fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{(s-1/2)(s+1/2)}{(s+1000)(s^2+2s+10000)}$$

Esercizio 2.[9 punti] Si consideri un sistema lineare a tempo discreto descritto dall'equazione alle differenze

$$y(k) - y(k-1) + \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - \frac{1}{2}u(k-2) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

i) Si calcolino la risposta impulsiva e la risposta in frequenza.

ii) Si trovi l'uscita del sistema con ingresso il segnale $u(k) = (1/2)^k \delta_{-1}(k)$ e condizioni iniziali $y(-1) = 1$, $y(-2) = 1$.

iii) Dire per quali valori di K il sistema (1) con l'ingresso $u(k)$ definito dalla relazione

$$u(k) = -Ky(k) + r(k)$$

è asintoticamente stabile e BIBO stabile.

Esercizio 3.[6 punti] Si consideri il sistema a tempo continuo con funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{K}{s+a}$$

ed il segnale di ingresso

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\Pi\left(\frac{t-4k\pi}{2\pi}\right)$$

Si trovino, se possibile, valori di K ed a in modo che la risposta a regime permanente soddisfi i seguenti requisiti:

(i) La componente continua abbia ampiezza maggiore o uguale ad 1.

(ii) Tute le armoniche di ordine superiore a 2 (cioè corrispondenti a frequenze $f_k = kf_0$, $k > 2$ dove f_0 è la frequenza fondamentale) presentino un'attenuazione in ampiezza di almeno un fattore 2.

SOLUZIONI

Esercizio 1.

i) [5 punti] La risposta in frequenza del sistema in forma di Bode è

$$H(j\omega) = -\frac{10^{-7}}{4}\frac{(1-j2\omega)(1+j2\omega)}{(1+\frac{j\omega}{1000})(1+j2\frac{\omega}{100}-\frac{\omega^2}{10000})}$$

I diagrammi di Bode di ampiezza e fase sono diagrammati nella Figura 1.

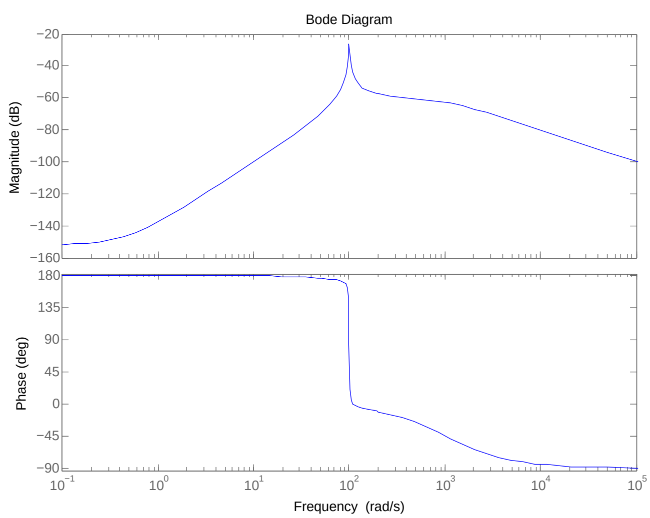

Figura 1. Diagramma di Bode.

Esercizio 2.

i) [3 punti] Conviene operare nel dominio delle trasformate zeta.

$$y(k) - y(k-1) + \frac{1}{4}y(k-2) = u(k-1) - \frac{1}{2}u(k-2) \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

La funzione di trasferimento risulta:

$$H(z) = \frac{z - 1/2}{(z-1/2)^2} = \frac{1}{(z-1/2)}$$

Poichè il sistema è BIBO stabile (la circonferenza unitaria appartiene alla regione di convergenza di $H(z)$) la risposta in frequenza è:

$$H(e^{j\theta}) = H(z)_{|z=e^{j\theta}} = \frac{1}{e^{j\theta} - 1/2}$$

Per calcolare la risposta impulsiva basta fare l'antitrasformata zeta:

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)](k)$$

Basta notare che

$$H(z) = \frac{1}{(z-1/2)} = z^{-1}\frac{z}{z-1/2}$$

e quindi

$$h(k) = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)](k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1/2}\right](k-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\delta_{-1}(k-1)$$

ii) [3 punti] L'uscita del sistema si scrive come somma dell'evoluzione libera $y_\ell(k)$ e della risposta forzata $y_f(k)$. L'equazione caratteristica ha come radice $\frac{1}{2}$ con molteplicità 2 e quindi

$$y_\ell(k) = c_1\left(\frac{1}{2}\right)^k + c_2 k\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Le costanti c_1 e c_2 si determinano imponendo che $y(-1) = 1$ e $y(-2) = 1$, quindi

$$\begin{aligned} 2c_1 - 2c_2 &= 1 \\ 4c_1 - 8c_2 &= 1 \end{aligned}$$

da cui $c_1 = 1/2 + c_2$ e $2 + 4c_2 - 8c_2 = 1$ e quindi

$$\begin{aligned} c_1 &= \tfrac{3}{4} \\ c_2 &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

La risposta forzata si può trovare utilizzando le trasformate zeta:

$$y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y_f(z)\right](k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z+1/2)^2}\right](k)$$

dove

$$Y_f(z) = H(z)U(z) = \tfrac{z}{(z+1/2)^2}$$

da cui

$$y_f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[2\frac{\frac{1}{2}z}{(z+1/2)^2}\right](k) = 2k\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta_{-1}(k)$$

La risposta complessiva risulta:

$$y(k) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{4}k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 2k\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta_{-1}(k)$$

iii) [3 punti] Se l'ingresso è definito dalla relazione

$$u(k) = -Ky(k) + r(k)$$

l'equazione alle differenze (2) diventa:

$$y(k) - y(k-1) + \frac{1}{4}y(k-2) = -Ky(k-1) + \frac{K}{2}y(k-2) + r(k-1) - \frac{1}{2}r(k-2) \quad k \in \mathbb{Z}$$

e quindi:

$$y(k) - (1-K)y(k-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)y(k-2) = r(k-1) - \frac{1}{2}r(k-2) \quad k \in \mathbb{Z}$$

L'equazione caratteristica diventa:

$$p(z) = z^2 - (1-K)z + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right) = 0$$

che ha come radici

$$\lambda_{1,2} = \frac{(1-K) \pm \sqrt{(1-K)^2 - 1 + 2K}}{2} = \frac{(1-K) \pm K}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} \\ \frac{1-2K}{2} \end{cases}$$

Di conseguenza il sistema è asintoticamente stabile se e solo se

$$\left|\frac{1-2K}{2}\right| < 1$$

i.e. se e solo se $-\frac{1}{2} < K < \frac{3}{2}$. Per la stablità BIBO conviene calcolare la funzione di trasferimento che risulta

$$H_{cl}(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{z^2 - (1-K)z + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - K\right)} = \frac{z - \frac{1}{2}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1-2K}{2}\right)} = \frac{1}{z - \frac{1-2K}{2}}$$

che è la funzione di trasferimento di un sistema BIBO stabile se e solo se

$$\left|\frac{1-2K}{2}\right| < 1$$

ritrovando le stesse condizioni necessarie per la stabilità asintotica. Quindi, in conclusione, il sistema "in retroazione" è asintoticamente e BIBO stabile se e solo se $-\frac{1}{2} < K < \frac{3}{2}$.

Esercizio 3. [6 punti]

Il segnale di ingresso $u(t)$ si ottiene dalla ripetizione periodica con periodo $T = 4\pi$ del segnale "generatore"

$$u_g(t) = 2\Pi\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

La domanda fa riferimento alle componenti della serie di Fourier del segnale $u(t)$ e quindi conviene, per prima cosa, calcolare la serie di Fourier di $u(t)$:

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

dove u_k si ottiene dalla ben nota relazione

$$u_k = \frac{1}{T} \mathcal{F}[u_g(t)] \left(\frac{k}{T} \right)$$

Utilizzando la trasformata notevole

$$\mathcal{F} \left[\Pi \left(\frac{t}{D} \right) \right] = D \mathrm{sinc}(Df)$$

si ottiene:

$$u_k = \mathrm{sinc} \left(\frac{k}{2} \right)$$

Se il sistema assegnato è BIBO stabile (i.e. se e solo se $a > 0$), l'uscita a regime permanente $y_{rp}(t)$ è un segnale periodico di perdiodo T (uguale al periodo del segnale di ingresso) e qundi ammette uno sviluppo in serie di Fourier

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t}$$

dove

$$y_k = H(j2\pi f_k) u_k \quad f_k = \frac{k}{T}$$

e $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega + a}$ è la risposa in frequenza del sistema assegnato. Le specifiche di progetto si riducono a (componente continua)

$$|y_0| = \left| \frac{K}{a} \right| |u_0| > 1$$

e (terza armonica e armoniche superiori)

$$|y_k| = \left| \frac{K}{j2\pi \frac{k}{T} + a} \right| |u_k| < \frac{1}{2} |u_k| \quad \forall |k| > 2$$

che sono equivalenti a

$$|K| \geq |a|$$

e

$$K^2 < \frac{1}{4} \left(a^2 + \left(2\pi \frac{k}{4\pi} \right)^2 \right) \quad \forall |k| > 2$$

Queste condizioni sono verificate contemporaneamente se e solo se

$$\begin{aligned} K^2 &\geq a^2 \\ K^2 &< \tfrac{9}{16} + \tfrac{a^2}{4} \end{aligned}$$

che ammette soluzione (con $a > 0$, visto che il sistema deve essere BIBO stabile) se e solo se $0 < a < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi ogni coppia (a, K) che soddisfa:

$$\begin{aligned} 0 < a < \tfrac{\sqrt{3}}{2} \\ |K| \geq a \\ K^2 < \tfrac{9}{16} + \tfrac{a^2}{4} \end{aligned}$$