COMPITO DI
IDENTIFICAZIONE DEI MODELLI ED ANALISI DEI DATI
21 gennaio 2011

Domanda 1. Sia $x_t \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{Z} \cap [0, N]$, la traiettoria di un robot che si muove nel piano ($\mathbb{R}^2$). Un modello che tipicamente viene utilizzato per modellare la traiettoria x_t è la così detta "passeggiata aleatoria integrata"

$$\begin{array}{rcl} x_{t+1} & = & x_t + v_t \\ v_{t+1} & = & v_t + n_t \end{array}$$

dove n_t è un rumore bianco, Gaussiano a media nulla e varianza σ_n^2.

Si assuma siano disponibili misure $y_t = x_t + e_t$ dove $\{e_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ è un rumore bianco Gaussiano, a media zero e varianza σ^2, indipendente da $\{n_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

1. Si descriva un procedimento per calcolare la covarianza $\mathbb{E}[x_t x_s^\top]$, $t \geq 0$, $s \geq 0$, del processo x_t assumendo che x_0 e v_0 siano variabili Gaussiane indipendenti, indipendenti da $\{n_t, e_t; t \geq 0\}$, a media 0 e varianze $\sigma_{x_0}^2$ e $\sigma_{v_0}^2$ rispettivamente. Dire se il processo y_t è stazionario.

2. Si scrivano le equazioni del filtro di Kalman per la stima della posizione x_t e della velocità v_t.

3. Si discuta come tarare i rumori di misura e modello, avendo a disposizione degli esperimenti di "test".

Domanda 2. Si assuma che il processo $y(t)$ sia generato dal modello dinamico

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k^o u(t-k) + e_0(t)$$

dove $e_0(t)$ è un rumore bianco, a media nulla e varianza σ^2, indipendente dal processo u. Il processo di "ingresso" $u(t)$ si assume bianco, a media nulla e varianza unitaria.

Per fare "identificazione", si utilizzi il criterio di minimizzazione dell'errore di predizione (PEM) ed il modello

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m} \theta_k u(t-k) + e(t)$$

con $e(t)$ bianco.

1. Si enunci una condizione sufficiente sui coefficienti θ_k^o affinchè il processo $y(k)$ sia stazionario.

2. Assumendo siano disponibili dati $y(t), u(t)$, $t \in [1, N]$, si imposti il problema di identificazione; si trovi lo stimatore $\underline{\hat{\theta}}_N$ del parametro vettoriale $\underline{\theta} := [\theta_1, ...\theta_m]$, scrivendo chiaramente quale funzione dei dati si deve minimizzare.

3. Si dica se lo stimatore $\hat{\theta}_N$ PEM converge e se si, dove.

Domanda 3.

1. Si enunci e dimostri la regola di Bayes
2. Si faccia un esempio di applicazione della stessa.

Domanda 4. Sia $f(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, una funzione incognita che si vuole stimare a partire da misure rumorose

$$y_i = f(t_i) + e_i \quad i = 1, .., N$$

dove i rumori di misura e_i, $i = 1, .., N$ sono congiuntamente Gaussiani, a media nulla e matrice covarianza

$$\mathbb{E}\left[\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_N \end{pmatrix}^\top\right] = \sigma^2 I$$

e indipendenti da $\{f(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Ovviamante, se f fosse una funzione "arbitraria" non vi sarebbe modo di "ricostruirla" da un numero finito di misure (rumorose); nella letteratura sui "problemi inversi" si dice che questo problema è "mal posto". Nella pratica si impongono delle condizioni di "regolarità" su f ad esempio dicendo che $f(t)$ è la traiettoria di un processo Gaussiano a media nota $m(t)$ e funzione covarianza

$$\text{cov}\{f(t), f(s)\} = C(t, s)$$

nota (si veda ad esempio il libro E. Rasmussen e C. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning* per tipiche espressioni di $C(t, s)$).

1. Si ricavi lo stimatore a minima varianza $\hat{f}(t|y_1, ..., y_N) := \mathbb{E}[f(t)|y_1, ..., y_N]$
2. Si ricavi l'espressione per la varianza dell'errore di stima $\text{Var}\{f(t)|y_1, ..., y_N\}$
3. Si illustri come si può ottenere una versione ricorsiva di questo stimatore.